

**Die Öffnungstopologie und stetige Störungen
linearer Operatoren und ihrer Adjungierten**

Herbert Leinfelder

1975

DIE ÖFFNUNGSTOPOLOGIE UND STETIGE STÖRUNGEN
LINEARER OPERATOREN UND IHRER ADJUNGIERTEN

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereichs Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Herbert Leinfelder
aus Schlachters
im Januar 1975



1. Berichterstatter: Prof. Dr. E. Wienholtz
2. Berichterstatter: Prof. Dr. G. Hämmerlin

Tag der mündlichen Prüfung: 10. Juni 1975

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	1
§ 1 Die Öffnungstopologie für beliebige lineare Operatoren	7
§ 2 Anwendung der Öffnungstopologie auf stetige Störungen linearer Operatoren und ihrer Adjungierten	29
§ 3 Stetige Störungen von abstrakt-elliptischen Randwertproblemen	44
Anhang	51
Bezeichnungen	59
Literaturverzeichnis	61

Einleitung

F. Rellich konnte in seiner 1939 erschienenen Arbeit [18] zeigen, dass die Eigenschaft der Selbstadjungiertheit eines linearen Operators stabil gegenüber "kleinen" Störungen ist. Dieses grundlegende Resultat wurde später von mehreren Autoren in verschiedener Hinsicht verfeinert. Zu nennen ist hierbei vor allem T. Kato [10], der wohl die heute gebräuchliche Fassung des Rellich'schen Störungssatzes aufstellte.

Störungssatz von Rellich-Kato :

Es seien S, T lineare Operatoren im Hilbertraum X . Es sei S (wesentlich-) selbstadjungiert, T symmetrisch mit $D(S) \subset D(T)$ und mit geeigneten Zahlen $a, b > 0$, $b < 1$ gelte die Ungleichung

$$(1) \quad \|Tx\| \leq a \|x\| + b \|Sx\| \quad (x \in D(S))$$

Dann ist auch $S+T$ (wesentlich-) selbstadjungiert.

Solche Aussagen sind nicht nur von mathematischem Interesse, sondern haben auch bedeutsame Anwendungen. Zum Beispiel liessen sich mittels dieses Störungssatzes die physikalisch relevanten Schrödinger-Operatoren als (wesentlich-) selbstadjungiert nachweisen (T. Kato [11], F. Stummel [19]).

T. Kato [10] (V, Theorem 4.6) konnte obige Aussage (wesentliche Selbstadjungiertheit!) auch noch auf den Grenzfall $b=1$ ausdehnen, allerdings nur unter der stärkeren Bedingung (2)

$$(2) \quad \|Tx\|^2 \leq a \|x\|^2 + \|Sx\|^2 \quad (x \in D(S))$$

R. Wüst [21] gelang es dann in seiner Dissertation den Störungssatz von Rellich-Kato auf gewisse Grenzfälle zu erweitern, insbesondere konnte er in (1) auch $b=1$ zulassen.

Beweistechnisch charakteristisch für die genannten Störungssätze ist, dass für eine geeignet gewählte Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\text{Im } \lambda \neq 0$ die Wertebereiche von $T+S+\lambda I$ und von $T+S+\lambda^* I$ als dicht im Hilbertraum X nachgewiesen werden. Erstmals benutzten P. Hess und T. Kato in einer 1970 erschienenen Arbeit [9] Stetigkeits-

betrachtungen in einer geeigneten Operatorentopologie zum Beweis eines Resultats über die Störung linearer Operatoren (in Banachräumen) und ihrer Adjungierten. In seiner Antrittsvorlesung an der Universität Frankfurt hat J. Weidmann [20] verschiedene Störungssätze über Operatoren im Hilbertraum unter einem einheitlichen Gesichtspunkt hergeleitet. Er benutzte dabei wesentlich ein Argument über die Stetigkeit der Projektionsschar $P(S + \lambda T)$ von $X \times X$ auf den Graphen von $S + \lambda T$. Diese Überlegungen, die ich einer persönlichen Mitteilung von Herrn Prof. Dr. J. Weidmann verdanke, veranlassten mich, ähnliche Stetigkeitsbetrachtungen für Operatorenscharen $A(\lambda)$ auch in Banachräumen durchzuführen. Im Gegensatz zum Hilbertraum X kann man im Banachraum X die "Stetigkeit" der Schar $A(\lambda)$ nicht durch Stetigkeitseigenschaften von Projektoren $P(A(\lambda))$ von $X \times X$ auf die Graphen von $A(\lambda)$ messen, da solche Projektoren nicht immer existieren. Man ist daher gezwungen, auf den Operatoren eine geeignete Topologie einzuführen, und zwar erweist sich in diesem Zusammenhang die Öffnungstopologie (Terminologie bei T. Kato [10]: "gap topology") als angemessen.

Die Öffnungstopologie für abgeschlossene Operatoren in Banachräumen ist schon seit ungefähr 20 Jahren bekannt ([17], [12], [7], [5], [16]) und ein wertvolles Hilfsmittel der Störungstheorie für Semi-Fredholmoperatoren geworden. In der Störungstheorie (wesentlich-) selbstadjungierter Operatoren ist sie bislang jedoch nicht konsequent benutzt worden. Dies mag seinen Grund zum einen darin haben, dass die in der Anwendung auftretenden linearen Operatoren zwar abschliessbar, aber meist nicht abgeschlossen sind, und zum anderen darin, dass die Öffnungstopologie in der Literatur wenig einfach und übersichtlich dargestellt ist.

Hauptziel der vorliegenden Arbeit ist, die vereinzelt stehenden Resultate von Rellich [18], Hess-Kato [9], Wüst [21], [22], Gustafson-Rejto [8], Weidmann [20] als Spezialfälle aus einem allgemeinen Resultat (Satz 2.1), das eine Verallgemeinerung eines Satzes von Hess-Kato darstellt, einfach abzuleiten und gleichzeitig nichttriviale Verallgemeinerungen davon zu gewinnen.

Bei der Verwirklichung dieses Vorhabens erwies es sich an verschiedenen Stellen als günstig, die Öffnungstopologie für beliebige lineare Operatoren in Banachräumen zur Verfügung zu haben und nicht nur für abgeschlossene Operatoren. Deshalb wird in der vorliegenden Arbeit zuerst die Öffnungstopologie für beliebige lineare Operatoren eingeführt und werden die für die Störung linearer Operatoren und ihrer Adjungierten wichtigsten Eigenschaften möglichst einfach hergeleitet.

Als weitere Anwendung der hier gewonnenen Störungssätze wird ein Resultat von F.E. Browder [4] (Theorem 1) über abstrakt-elliptische Randwertprobleme hergeleitet und verbessert.

Genauer enthält die vorliegende Arbeit folgendes:

In Paragraph 1 wird auf den Untervektorräumen eines Banachraumes die Öffnungstopologie von M.G. Krein, M.A. Krasnosel'skii und D.C. Mil'man [14] beschrieben. Um die Öffnungstopologie auf der Menge $\mathcal{O}(X,Y)$ der linearen Operatoren von X in Y (X,Y je Banachräume) einzuführen, werden zunächst im Rückgriff auf die Definition einer Abbildung die betrachteten Operatoren mit ihren Graphen identifiziert und dann wird wie bei G. Neubauer [16] auf dem kartesischen Produkt $X \times Y$ die allgemeine Norm $\|(x,y)\|_p := p(\|x\|, \|y\|)$ betrachtet (für die Eigenschaften von p sei auf Seite 12 verwiesen). Aus den charakteristischen Eigenschaften der allgemeinen Norm $\|\cdot\|_p$ lassen sich dann Eigenschaften der Öffnungstopologie von $\mathcal{O}(X,Y)$ herleiten. Da sich alle hier betrachteten Normen $\|\cdot\|_p$ als äquivalent erweisen, würde es natürlich genügen, eine spezielle Norm, etwa $\|(x,y)\| := (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2}$, zu wählen. Es zeigt sich jedoch bei konkreten Rechnungen (man vergleiche hierzu Darstellungen in der Literatur), dass die spezielle Gestalt der benutzten Norm leicht den Blick auf das Wesentliche und auf Vereinfachungsmöglichkeiten verstellen kann. Die Freiheit bei der Wahl der Norm bietet überdies die Möglichkeit, gewisse Aussagen durch Benutzung der je angemessenen Norm zu verschärfen.

Sämtliche Resultate des Paragraphen 1 scheinen für nicht abschliessbare Operatoren neu zu sein. Obwohl sich die Verallgemeinerung der Öffnungstopologie auf beliebige Operatoren in der vorliegenden Arbeit (vgl. z.B. Satz 2.1, Korollar 2.3) als sehr nützlich erwies, bleibt doch die Frage, ob alle diese Ergebnisse (für nicht abschliessbare Operatoren) sich auch weiter als fruchtbar in der Anwendung erweisen. Aber auch für abgeschlossene Operatoren bringen einige Sätze neue Details und Einsichten.

Der Umfang dieses Abschnitts lässt sich einerseits daraus erklären, dass die oben genannte vernünftigt erscheinende Verallgemeinerung der Öffnungstopologie berücksichtigt wurde. Zum anderen lässt die Literatur die Öffnungstopologie als keineswegs leicht zugängliches Instrument erscheinen. Es wurde daher Wert darauf gelegt, die hier als wichtiges Hilfsmittel dienende (verallgemeinerte) Öffnungstopologie möglichst einfach darzustellen. Teilweise wurden in der Literatur vorhandene Schlussweisen um der Geschlossenheit der Darstellung willen wiederholt (je unter Verweis).

Paragraph 2 bringt den Beweis der Hauptresultate. Eine zentrale Rolle (auch für Paragraph 3) spielt dabei folgende Verallgemeinerung eines Satzes von P. Hess und T. Kato [9] .

Satz 2.1 : Es seien X, Y Banachräume, Ω sei ein topologischer zusammenhängender Raum. Es seien $A: \Omega \rightarrow \mathcal{O}(X, Y)$ und $B: \Omega \rightarrow \mathcal{O}(Y^*, X^*)$ stetige Abbildungen. Für alle $\omega \in \Omega$ sei $A(\omega)$ dicht definiert und $B(\omega) \subset A(\omega)^*$, und für ein $\omega_0 \in \Omega$ sei $\overline{B(\omega_0)} = A(\omega_0)^*$.

Dann ist $\overline{B(\omega)} = A(\omega)^*$ für alle $\omega \in \Omega$.

Gegenüber P. Hess-T. Kato [9] ist neu, dass topologisch zusammenhängende Räume Ω (statt bisher bogenweise-zusammenhängende) und insbesondere nicht abschliessbare Operatorenscharen $A(\omega)$ zugelassen sind. Der sehr einfache Beweis von Satz 2.1 wird

nur unter Verwendung von Lemma 1.3 erbracht.

Schon an dieser Stelle folgt dann unmittelbar der Störungssatz von Rellich-Kato als Spezialfall. Korollar 2.6 umfasst den zuerst von R. Wüst [21] bewiesenen Grenzfall $b=1$ des Störungssatzes von Rellich-Kato. Auch Lemma 2.7 verschärft ein Resultat von R. Wüst [21]. Satz 2.9 schliesslich beantwortet die Frage, für welche $\omega \in \mathbb{C}$ die Gleichung

$$(A + \omega B)^* = A^* + \omega^* B^*$$

gilt und wann $A + \omega B$ und $(A + \omega B)^*$ relativ ω invariante Kernbereiche besitzen. Aus diesem Satz lassen sich dann unmittelbar die Ergebnisse von J. Weidmann [20], R. Wüst [22] (Theorem 2), [21] (Theorem 1), P. Hess-T. Kato [9] (Proposition S.529, Corollary 2), K.E. Gustafson-P.A. Rejto [8] (Corollary 3.4 in bereits partiell verallgemeinerter Form) ableiten. Wie sich die klassische Argumentation ([18], [10] S.287-290, [21]) formal hier einordnen lässt, wird aus dem Anhang (A6) ersichtlich.

Der in Paragraph 3 dargestellte kurze Beweis des Resultats von F.E. Browder [4] über abstrakt-elliptische Randwertprobleme benutzt konsequent die Öffnungstopologie und erlaubt damit eine Erweiterung auf Banachräume. Konkret bedeutet dies, dass man etwa elliptische Randwertprobleme (unter Voraussetzung der a priori-Abschätzungen von Agmon-Douglis-Nirenberg [2]) nicht nur in Sobolev-Räumen mit quadratisch integrierbaren, sondern auch in solchen mit zur p -ten Potenz ($p > 1$) integrierbaren Distributionsableitungen betrachtet. Browder's Originalbeweis dagegen kann ohne wesentliche Modifizierung nicht auf Banachräume übertragen werden, da seine auf den Hilbertraum zugeschnittene Argumentation an wesentlichen Stellen die Existenz von Projektoren auf abgeschlossene Unterräume erfordert. Was die Tragweite dieses Resultats über abstrakt-elliptische Randwertprobleme anbelangt, sei auf F.E. Browder [4] verwiesen.

Drei ziemlich selbstverständliche und gleichermaßen umständliche Rechnungen wurden der Vollständigkeit der Darstellung wegen im Anhang durchgeführt, ebenso einige gegenüber F.E. Browder etwas differenzierte Betrachtungen über lineare Operatoren,

die sich jedoch geläufiger Schlussweisen bedienen. Schliesslich finden sich noch zwei erläuternde Ergänzungen in diesem Anhang.

An dieser Stelle danke ich allen, die mir die Anfertigung dieser Dissertation ermöglichten, besonders meinen akademischen Lehrern Prof. Dr. W. Roelcke und Prof. Dr. E. Wienholtz. Sehr herzlich möchte ich Herrn Prof. Dr. J. Weidmann danken, der mir das unveröffentlichte Manuskript seiner Antrittsvorlesung überliess und damit den Anstoss zu den hier geschilderten Überlegungen gab.

§ 1 Die Öffnungstopologie für beliebige lineare Operatoren

Will man die Öffnungstopologie für lineare Operatoren einführen, so ist es bequem, zunächst eine entsprechende Topologie auf der Menge aller Untervektorräume eines Banachraumes zu erklären.

Wir betrachten deshalb einen Banachraum X über K (wobei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ bedeute) und die zugehörige Norm $\|\cdot\|$. Es sei $\mathcal{U}(X) := \{M \mid M \text{ ist Untervektorraum von } X\}$. Auf der Menge $\mathcal{U}(X) \times \mathcal{U}(X)$ führen wir (vgl. [10] S.198) folgende Funktion d ein:

$$(1.1) \quad d(M,N) := \begin{cases} \sup_{x \in S_M} \text{dist}(x, S_N) & \text{falls } M \neq 0 \neq N \\ 0 & \text{falls } M = 0 \\ 2 & \text{falls } M \neq 0 = N \end{cases}$$

Dabei ist $M, N \in \mathcal{U}(X)$, $S_N := \{x \mid x \in N, \|x\| = 1\}$ und $\text{dist}(x, S_N) := \inf \{\|x-y\| \mid y \in S_N\}$.

Für Elemente $L, M, N \in \mathcal{U}(X)$ bestätigt man (vgl. [10] S.198) unmittelbar folgende Eigenschaften:

$$(1.2) \quad M \subset \overline{N} \iff d(M,N) = 0$$

$$(1.3) \quad d(L,N) \leq d(L,M) + d(M,N)$$

(1.3) ist dabei (abgesehen von den trivialen Fällen) eine einfache Konsequenz der Dreiecksungleichung für die Norm. Somit hat d bis auf die Symmetrie typische Eigenschaften einer Halbmetrik (zur Definition der Halbmetrik siehe etwa [13] S.119). Für $M, N \in \mathcal{U}(X)$ erklären wir daher

$$(1.4) \quad \hat{d}(M,N) := \max \{d(M,N), d(N,M)\}$$

Lemma 1.1 : Für jeden Banachraum X ist $(\mathcal{U}(X), \hat{d})$ ein halbmetrischer Raum und es gilt:

$$\hat{d}(M, N) = 0 \iff \overline{M} = \overline{N}$$

Beweis: Es seien $M, N \in \mathcal{U}(X)$. Offensichtlich ist $\hat{d}(M, N) \geq 0$ und wegen (1.2) ist $\overline{M} = \overline{N}$ genau dann, wenn $d(M, N) = 0 = d(N, M)$, d.h. $\hat{d}(M, N) = 0$. Trivialerweise ist $\hat{d}$ symmetrisch und wegen (1.3) erfüllt $\hat{d}$ die Dreiecksungleichung. $\square$

Die von $\hat{d}$ erzeugte Topologie (im Sinne von [13], S.119) nennen wir die Öffnungstopologie von $\mathcal{U}(X)$ (in [10], S.198: "gap topology"). Der Grund für diese Benennung liegt darin, dass M.G. Krein, M.A. Krasnosel'skii und D.C. Mil'man [14] eine Öffnungsfunktion $\hat{\delta}$ einführten, welche die von $\hat{d}$ erzeugte Öffnungstopologie im Sinne von Lemma 1.2 bestimmt. $\hat{\delta}$ ist folgendermassen definiert: Für $M, N \in \mathcal{U}(X)$ sei zunächst

$$(1.5) \quad \delta(M, N) := \inf \{ \delta \mid \delta \geq 0, \text{dist}(x, N) \leq \delta \cdot \|x\| \ (x \in M) \}$$

Man sieht leicht, dass $\delta(M, N)$ in $\mathbb{R}$ existiert und folgende Relationen gelten.

$$(1.6) \quad \delta(M, N) = \sup \{ \text{dist}(x, N) \mid x \in M, \|x\| \leq 1 \}$$

$$(1.7) \quad \delta(M, N) = \begin{cases} \sup_{x \in S_M} \text{dist}(x, N) & \text{falls } M \neq 0 \\ 0 & \text{falls } M = 0 \end{cases}$$

$$(1.8) \quad 0 \leq \delta(M, N) \leq 1$$

Die Öffnung $\hat{\delta}(M, N)$ zwischen den Untervektorräumen M und N ist nun erklärt durch:

$$(1.9) \quad \hat{\delta}(M, N) := \max \{ \delta(M, N), \delta(N, M) \}$$

Lemma 1.2 zeigt, dass $\hat{d}$ und $\hat{\delta}$ eng miteinander verknüpft

sind (vgl. [10], S.198).

Lemma 1.2 : Für die oben definierten Funktionen $d, \hat{d}, \delta, \hat{\delta}$ gelten folgende Ungleichungen:

$$(1.10) \quad \delta \leq d \leq 2\delta, \quad \hat{\delta} \leq \hat{d} \leq 2\hat{\delta}$$

Eine Menge $\mathcal{M} \subset \mathcal{U}(X)$ ist daher genau dann offen in $(\mathcal{U}(X), \hat{d})$, wenn sie Vereinigung von Mengen der Gestalt $\{N \mid \hat{\delta}(M, N) < r\}$ ist. Die Öffnungstopologie wird also in diesem Sinne auch von $\hat{\delta}$ erzeugt.

Beweis: Es genügt für $M, N \in \mathcal{U}(X)$ die Ungleichung

$$\delta(M, N) \leq d(M, N) \leq 2 \cdot \delta(M, N)$$

nachzuweisen. Falls $M=0$ oder $N=0$ gilt, ist dies unmittelbar ersichtlich. Sei also $M \neq 0 \neq N$. Wegen

$$\text{dist}(x, N) \leq \text{dist}(x, S_N) \quad (x \in S_N)$$

ist

$$\delta(M, N) \leq d(M, N).$$

Um den zweiten Teil unserer Ungleichung zu erhalten, bemerken wir, dass für $x \in S_M, y \in N, y \neq 0$ gilt:

$$(1.11) \quad \|x - \frac{y}{\|y\|}\| \leq 2 \cdot \|x - y\|$$

Dies folgt aus der Ungleichungskette

$$\begin{aligned} \| \|x\|y - y \| &= \| \|x\|y - y\|y\| + y\|y\| - y\|x\| \| \\ &\leq \|y\| \cdot \|x - y\| + \|y\| \cdot |\|x\| - \|y\|| \\ &\leq 2 \cdot \|y\| \cdot \|x - y\| \end{aligned}$$

Aus (1.11) erhalten wir nun

$$\text{dist}(x, S_N) \leq 2 \cdot \text{dist}(x, N) \quad (x \in S_M)$$

und somit

$$d(M, N) \leq 2 \cdot \delta(M, N) \quad \square$$

Wegen (1.10) ist $\hat{\delta}$ zur Beschreibung von $(\mathcal{U}(X), \hat{d})$ ebenso gut verwendbar wie $\hat{d}$. Jedoch $\hat{\delta}$ lässt sich bei Abschät-

zungen und Rechnungen auf Grund seines linearen Charakters (siehe Definition von $\delta(M, N)$) leichter handhaben.

Für $M, N \in \mathcal{U}(X)$ und einen linearen Operator $T: M \rightarrow N$ sei $\|T\| := \sup \{ \|Tx\| \mid x \in M, \|x\| \leq 1 \} \leq \infty$.

(T ist also genau dann beschränkt, wenn $\|T\| < \infty$ ist).

Lemma 1.3: Es seien X, Y Banachräume, $M, N \in \mathcal{U}(X)$. Dann gilt:

$$i) \quad \delta(M, N) = 0 \iff M \subset \bar{N}$$

$$ii) \quad M \subset \bar{N} \text{ und } \bar{M} \neq \bar{N} \implies \delta(N, M) = 1$$

$$iii) \quad \text{Es ist } \delta(M, N) \leq \|id_M - T\| \text{ für jede lineare Abbildung } T: M \rightarrow N.$$

$$iv) \quad \text{Ist } j \text{ ein isometrischer Isomorphismus von } X \text{ in } Y, \text{ so ist}$$

$$\delta_Y(j(M), j(N)) = \delta_X(M, N)$$

$$v) \quad \text{Es ist } \delta_X(M, N) = \delta_X^*(N^\perp, M^\perp) \quad *)$$

Beweis: Wegen (1.2) ist $M \subset \bar{N}$ genau dann, wenn $\delta(M, N) = 0$ ist und nach (1.10) gilt genau dann $\delta(M, N) = 0$, wenn $\delta(M, N) = 0$ ist. Damit ist i) bewiesen.

Ist $\bar{M} \subsetneq \bar{N}$, so gibt es nach dem Satz vom fastorthogonalen Element ([10], III, Lemma 1.12) zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x_\varepsilon \in \bar{N}$ mit $\|x_\varepsilon\| = 1$ und $\text{dist}(x_\varepsilon, \bar{M}) > 1 - \varepsilon$. Also ist

$$\delta(N, M) = \sup_{x \in S_N} \text{dist}(x, M) = \sup_{x \in S_N} \text{dist}(x, \bar{M}) > 1 - \varepsilon$$

D.h. aber $\delta(N, M) \geq 1$ und wegen (1.8) ist dann $\delta(N, M) = 1$.

Sei nun noch $T: M \rightarrow N$ linear und $x \in M$, dann gilt:

) Mit X^ bezeichnen wir ([10], S. 134) die Menge aller antilinearen stetigen Abbildungen von X in $\mathbb{K}$. $M^\perp$ wird als die Menge $\{x^* \mid x^* \in X^*, x^*|_M = 0\}$ definiert.

$$\text{dist}(x, N) \leq \|x - Tx\| \leq \|id_M - T\| \cdot \|x\|$$

Mithin ist $\delta(M, N) \leq \|id_M - T\|$ und damit iii) bewiesen.

Zum Nachweis von iv) wählen wir $x \in M$ beliebig, dann ist:

$$\begin{aligned} \text{dist}(x, N) &= \inf\{\|x - y\| \mid y \in N\} = \inf\{\|j(x) - j(y)\| \mid y \in N\} \\ &= \inf\{\|j(x) - z\| \mid z \in j(N)\} = \text{dist}(j(x), j(N)) \end{aligned}$$

Also haben wir

$$\begin{aligned} \text{dist}(x, N) &= \text{dist}(j(x), j(N)) \leq \delta_Y(j(M), j(N)) \cdot \|j(x)\| \\ &= \delta_Y(j(M), j(N)) \cdot \|x\| \end{aligned}$$

Mithin ist $\delta_X(M, N) \leq \delta_Y(j(M), j(N))$ und analog gilt auch.

die Ungleichung $\delta_Y(j(M), j(N)) \leq \delta_X(M, N)$.

Einen einfachen Beweis für die Behauptung v) findet man etwa in [10], IV, Theorem 2.9. $\square$

Bemerkung: Die Aussage iii) von Lemma 1.3 illustriert (allerdings nur grob) die Öffnungstopologie von $\mathcal{U}(X)$. Gibt es nämlich stetige lineare Operatoren $S: M \rightarrow N, T: N \rightarrow M$ mit $\|id_M - S\| \leq \varepsilon$ und $\|id_N - T\| \leq \varepsilon$, so ist $\delta(M, N) \leq \varepsilon$.

Auf der Menge der abgeschlossenen Untervektorräume von X sind weitere (formal) verschiedene Topologien eingeführt worden. Hierzu vergleiche man J.L. Massera und J.J. Schäffer [15], J.D. Newburgh [17] und E. Berkson [3].

Auch ist zu erwähnen, dass $\hat{\delta}$ im allgemeinen keine Halbmetrik darstellt (vgl. [3], S.9). Falls X jedoch ein Hilbertraum ist und die Norm $\|\cdot\|$ vom Skalarprodukt herrührt, ist $\hat{\delta}$ wegen (1.10) eine zu $\hat{d}$ äquivalente Halbmetrik. Es gilt nämlich

$$(1.12) \quad \hat{\delta}(M, N) = \|P_{\bar{M}} - P_{\bar{N}}\|_{\mathcal{B}(X)} \quad (M, N \in \mathcal{U}(X)),$$

wobei $P_{\bar{M}}$ bzw. $P_{\bar{N}}$ die orthogonale Projektion von X auf $\bar{M}$ bzw. $\bar{N}$ und $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(X)}$ die Supremumsnorm im Banachraum $\mathcal{B}(X)$ der beschränkten, linearen Operatoren von X in sich bezeichne.

Einen Beweis für (1.12) findet man z.B. in [1], S.96-98).

Seien nun X, Y Banachräume über K und sei $\mathcal{O}(X, Y)$ die Menge der linearen in X definierten Operatoren $T: D(T) \rightarrow Y$. Falls $X=Y$ ist, schreiben wir kürzer $\mathcal{O}(X)$ statt $\mathcal{O}(X, X)$. Jeden Operator $T \in \mathcal{O}(X, Y)$ identifizieren wir mit seinem Graphen $G(T)$, d.h. es ist

$$T = \{(x, Tx) \mid x \in D(T)\} = G(T)$$

Für Operatoren $S, T \in \mathcal{O}(X, Y)$ und $\lambda \in K$ führen wir neue lineare Operatoren $S+T$ und $\lambda \cdot T$ ein durch

$$\begin{aligned} D(S+T) &:= D(S) \cap D(T), & (S+T)x &:= Sx + Tx \\ D(\lambda S) &:= D(S), & (\lambda S)x &:= \lambda \cdot (Sx) \end{aligned}$$

Im Sinne obiger Identifizierung ist jeder Operator $T \in \mathcal{O}(X, Y)$ ein Untervektorraum von $X \times Y$. Falls man nun $X \times Y$ zu einem Banachraum über K macht, ist $\mathcal{O}(X, Y) \subset \mathcal{U}(X \times Y)$ und für Operatoren $S, T \in \mathcal{O}(X, Y)$ sind dann die Grössen $d(S, T)$, $\hat{d}(S, T)$, $\delta(S, T)$, $\hat{\delta}(S, T)$ erklärt und man hat wegen Lemma 1.1 in $\mathcal{O}(X, Y)$ eine Topologie eingeführt. Es ist klar, dass die Topologie auf $\mathcal{O}(X, Y)$ von der Wahl der Norm auf $X \times Y$ abhängt. Vernünftigerweise wird man jedoch nur solche Normen auf $X \times Y$ betrachten, welche mit den Normen auf X und Y zusammenhängen. Gebräuchliche Normen dieser Art sind z.B.

$$\begin{aligned} \|(x, y)\|_1 &:= (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2} \\ \|(x, y)\|_2 &:= \|x\| + \|y\| \end{aligned} \quad (x \in X, y \in Y)$$

Um alle gebräuchlichen Normen einzuschliessen und der Tatsache gerecht zu werden, dass in der Literatur eine einheitliche Wahl einer Norm nicht üblich ist, betrachten wir wie bei G. Neubauer [16] allgemeine Normen der Form

$$(1.13) \quad \|(x, y)\|_p := p(\|x\|, \|y\|) \quad (x \in X, y \in Y)$$

wobei p eine Norm des $\mathbb{R}^2$ ist mit $p(\zeta_1, \zeta_2) = p(|\zeta_1|, |\zeta_2|)$ und $p(1, 0) = 1 = p(0, 1)$. Die letzte Bedingung sichert dabei, dass X bzw. Y isometrisch in $(X \times Y, \|\cdot\|_p)$ eingebettet

wird, denn es ist für $x \in X, y \in Y$

$$\|(x, 0)\|_p = p(\|x\|, 0) = \|x\| \cdot p(1, 0) = \|x\|$$

$$\|(0, y)\|_p = p(0, \|y\|) = \|y\| \cdot p(0, 1) = \|y\|$$

Dass $\|\cdot\|_p$ in der Tat eine Norm auf $X \times Y$ ist, garantiert das folgende Lemma 1.4, das im Anhang (A1) verifiziert wird.

Lemma 1.4 : Seien X, Y Banachräume über $\mathbb{K}$, es sei p eine Norm im $\mathbb{R}^2$ mit $p(\zeta_1, \zeta_2) = p(|\zeta_1|, |\zeta_2|)$ und $p(1, 0) = 1 = p(0, 1)$. Für $x \in X, y \in Y$ sei $\|(x, y)\|_p := p(\|x\|, \|y\|)$.

Mit diesen Voraussetzungen gilt:

i) $\|\cdot\|_p$ ist eine Norm auf $X \times Y$.

ii) $\max_{i=1,2} |\zeta_i| \leq p(|\zeta_1|, |\zeta_2|)$ für $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}$.

iii) $p(\zeta_1, \zeta_2) \leq p(\eta_1, \eta_2)$ für $0 \leq \zeta_i \leq \eta_i$ und $i=1, 2$.

Ist nun $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ wie in (1.13) gewählt, so existiert für $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$ offenbar $p'(\eta_2, \eta_1) := \max\{|\zeta_1 \eta_1 + \zeta_2 \eta_2| \mid p(\zeta_1, \zeta_2) \leq 1\}$ und ist wieder eine im Sinne von (1.13) zulässige Norm. Mit p' haben wir nun folgende Abschätzung

$$(1.14) \quad |\zeta_1 \eta_1 + \zeta_2 \eta_2| \leq p(\zeta_1, \zeta_2) \cdot p'(\eta_2, \eta_1)$$

die sich später als sehr nützlich erweisen wird. Zu bemerken ist noch, dass wegen

$$(1.15) \quad \max\{\|x\|, \|y\|\} \leq \|(x, y)\|_p \leq \|x\| + \|y\|$$

$(X \times Y, \|\cdot\|_p)$ sogar ein Banachraum ist.

Für den Rest dieses Paragraphen 1 fassen wir $X \times Y$ stets als Banachraum auf versehen mit der Norm $\|\cdot\|_p$. Natürlich hängen die Grössen $\delta(S, T), \hat{\delta}(S, T), d(S, T), \hat{d}(S, T)$ für Operatoren $S, T \in \mathcal{O}(X, Y)$ ab von der Wahl der Norm $\|\cdot\|_p$, doch wir machen diese Abhängigkeit nach aussen hin nicht eigens deutlich. Obwohl wegen (1.15) alle Normen $\|\cdot\|_p$ und daher auch die zu-

gehörigen Halbmetriken $\hat{d}$ (auf $\mathcal{U}(X \times Y) \setminus \{0\}$) äquivalent sind, haben wir uns aus zwei Gründen für die Verwendung der allgemeinen Norm $\|\cdot\|_p$ entschieden. Zum einen können gewisse, später hergeleitete Abschätzungen durch Spezialisieren auf das jeweils angemessene p schärfer gemacht werden, zum anderen werden fast alle Beweise klarer und übersichtlicher, weil die Benutzung der allgemeinen, abstrakten Norm $\|\cdot\|_p$ nicht den Blick auf das Wesentliche trübt (man vergleiche die Darstellungen in der Literatur).

Für abgeschlossene Operatoren S, T und $\|(x, y)\|_p = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2}$ (d.h. $p(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2}$) stimmen die hier eingeführten Grössen $\delta(S, T), \hat{\delta}(S, T), d(S, T), \hat{d}(S, T)$ mit denen in [10], S.201 überein. Auch zeigen die Ausführungen in Paragraph 2, dass die Ausdehnung der Öffnungstopologie auf beliebige lineare Operatoren nicht nur aus praktischen Gründen nützlich ist.

Die folgenden Resultate scheinen für nicht abschliessbare Operatoren neu zu sein. Sie enthalten aber auch für abschliessbare Operatoren nicht uninteressante Teilergebnisse und Details, welche zum Teil wesentlich in Paragraph 3 verwendet werden konnten. Besonderer Wert wurde darauf gelegt, die Beweise möglichst klar zu gestalten.

Für beliebige Operatoren $S, T \in \mathcal{O}(X, Y)$ sei

$$(1.16) \quad \|S\|_T := \sup \{ \|Sx\| \mid x \in D(S) \cap D(T), \|(x, Tx)\|_p \leq 1 \} \leq \infty$$

wobei p die für $X \times Y$ ausgewählte Norm des $\mathbb{R}^2$ ist. Da p in diesem Paragraphen fixiert gedacht ist, machen wir diese p -Abhängigkeit nicht eigens durch einen p -Index deutlich.

Lemma 1.5: Es seien $S, T \in \mathcal{O}(X, Y)$. Dann gilt:

Genau dann ist $\|S\|_T < \infty$, wenn es Zahlen $a, b > 0$ so gibt, dass $\|Sx\| \leq a\|x\| + b\|Tx\|$ ist für alle $x \in D(S) \cap D(T)$. Trifft letzteres zu, so ist $\|S\|_T \leq p'(b, a)$.

Bemerkungen: 1) Falls $D(T) \subset D(S)$ ist und die Ungleichung

$\|Sx\| \leq a \cdot \|x\| + b \cdot \|Tx\|$ für alle $x \in D(T)$ gilt, nennt man S üblicherweise T -beschränkt (vgl. [10], S.190).

2) Für Operatoren $S, T \in \mathcal{O}(X, Y)$ gilt stets mit $D := D(S) \cap D(T)$

$$\|S\|_T \leq \|S|_D\| := \sup\{\|Sx\| \mid x \in D, \|x\| \leq 1\} \leq \infty$$

Beweis von Lemma 1.5 : Ist $\|Sx\| \leq a\|x\| + b\|Tx\|$ für Elemente $x \in D(S) \cap D(T)$, so folgt wegen (1.14)

$$\|Sx\| \leq p'(b, a) \cdot p(\|x\|, \|Tx\|) = p'(b, a) \cdot \|(x, Tx)\|_p$$

also $\|S\|_T \leq p'(b, a) < \infty$.

Ist umgekehrt $\|S\|_T < \infty$, so gilt für $x \in D(S) \cap D(T)$

$$\|Sx\| \leq \|S\|_T \cdot \|(x, Tx)\|_p \leq \|S\|_T \cdot (\|x\| + \|Tx\|) \quad \square$$

Zu folgendem Satz vergleiche man [16], 2.4.5.

Satz 1.6 : Es seien $S, T \in \mathcal{O}(X, Y)$ und $D := D(S) \cap D(T)$.

Dann gelten die Ungleichungen

$$1) \quad \delta(S|_D, T|_D) \leq \|S - T\|_S$$

$$11) \quad \delta(T|_D, S|_D) \leq \begin{cases} 1 & \text{falls } \|S - T\|_S \geq 1 \\ \frac{\|S - T\|_S}{1 - \|S - T\|_S} & \text{falls } \|S - T\|_S < 1 \end{cases}$$

$$111) \quad \hat{\delta}(S|_D, T|_D) \leq 2 \cdot \|S - T\|_S$$

Bemerkungen: 1) Falls $D(S) = D(T)$ und $S - T$ beschränkt ist, gilt

$$(1.17) \quad \hat{\delta}(S, T) \leq \|S - T\|$$

2) Falls $\|(S - T)x\| \leq a\|x\| + b\|Sx\|$ für alle $x \in D(S) = D(T)$ gilt, ist

$$\delta(S, T) \leq p'(b, a)$$

Wegen $\delta(S, T) \leq 1$ und $\max\{a, b\} \leq p'(b, a)$ enthält diese Ungleichung nur dann eine echte Aussage, wenn a und b kleiner

als 1 sind. Dann gilt aber auch die Ungleichung (zum Bestehen dieser Ungleichung genügt es $b < 1$ zu verlangen)

$$\|(S-T)x\| \leq (1-b)^{-1} [a\|x\| + b\|Tx\|]$$

Also ist wegen Lemma 1.5 $\delta(T,S) \leq (1-b)^{-1} p'(b,a)$ und daher

$$(1.18) \quad \hat{\delta}(S,T) \leq (1-b)^{-1} p'(b,a)$$

Man vergleiche (1.18) auch mit [10], IV, Theorem 2.14.

Beweis von Satz 1.6 : Sei $x \in D = D(S) \cap D(T)$, dann ist

$$\begin{aligned} \text{dist}((x, Sx), T|D) &\leq \|(x, Sx) - (x, Tx)\|_p = \|Sx - Tx\| \\ &\leq \|S - T\|_S \cdot \|(x, Sx)\|_p \end{aligned}$$

also $\delta(S|D, T|D) \leq \|S - T\|_S$ und damit i) bewiesen.

Falls $\|S - T\|_S \geq 1$ ist, sind die Behauptungen ii) und iii) klar. Sei also $\|S - T\|_S < 1$, dann gilt aber für $x \in D$

$$\begin{aligned} \|(S-T)x\| &\leq \|S - T\|_S \cdot p(\|x\|, \|Sx\|) \\ &\leq \|S - T\|_S \cdot p(\|x\|, \|Tx\| + \|(S-T)x\|) \\ &\leq \|S - T\|_S \cdot [p(\|x\|, \|Tx\|) + \|(S-T)x\|] \end{aligned}$$

d.h. $\|(S-T)x\| \leq [1 - \|S - T\|_S]^{-1} \cdot \|S - T\|_S \cdot \|(x, Tx)\|_p$, also

$$\|(S-T)|_T\| \leq [1 - \|S - T\|_S]^{-1} \cdot \|S - T\|_S, \text{ woraus ii) folgt.}$$

Nun ist $\|S - T\|_S \cdot [1 - \|S - T\|_S]^{-1} < 1$ genau dann, wenn

$\|S - T\|_S < \frac{1}{2}$ ist und in diesem Fall gilt

$$\|S - T\|_T \leq \|S - T\|_S \cdot [1 - \|S - T\|_S]^{-1} \leq 2 \cdot \|S - T\|_S$$

also ist stets

$$\hat{\delta}(S|D, T|D) \leq 2 \cdot \|S - T\|_S \quad \square$$

Lemma 1.7 : Seien $S, T \in \mathcal{C}(X, Y)$ und sei T beschränkt (d.h. $\|T\| < \infty$). Dann gelten die Ungleichungen:

$$i) \quad \|(x, Sx)\|_p \leq \|x\| \cdot p(1, \|T\|) + p'(1, \|T\|) \cdot \delta(S, T) \cdot \|(x, Sx)\|_p$$

für alle $x \in D(S)$

$$ii) \quad \|S - T\|_S \leq p'(1, \|T\|) \cdot \delta(S, T)$$

$$iii) \quad \delta(D(T), D(S)) \leq p(1, \|T\|) \delta(T, S)$$

Beweis: Sei $x \in D(S)$, $y \in D(T)$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \|(x, Sx)\|_p &\leq p(\|x\|, \|Sx - Ty\| + \|T\| \|y\|) \\ &\leq p(\|x\|, \|T\| \|y\|) + \|Sx - Ty\| \\ &\leq p(\|x\|, \|T\| (\|x - y\| + \|x\|)) + \|Sx - Ty\| \\ &\leq \|T\| \|x - y\| + \|Sx - Ty\| + \|x\| \cdot p(1, \|T\|) \\ &\leq p'(1, \|T\|) \cdot p(\|x - y\|, \|Sx - Ty\|) + \|x\| \cdot p(1, \|T\|) \\ &= p'(1, \|T\|) \cdot \|(x, Sx) - (y, Ty)\|_p + \|x\| \cdot p(1, \|T\|) \end{aligned}$$

Also ist

$$\|(x, Sx)\|_p \leq p'(1, \|T\|) \cdot \text{dist}((x, Sx), T) + \|x\| \cdot p(1, \|T\|)$$

Wegen $\text{dist}((x, Sx), T) \leq \delta(S, T) \cdot \|(x, Sx)\|_p$ folgt nun die Behauptung i).

Zum Nachweis von ii) sei $x \in D(S) \cap D(T)$ und $y \in D(T)$ beliebig gewählt. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \|(S - T)x\| &\leq \|Sx - Ty\| + \|T(y - x)\| \\ &\leq \|Sx - Ty\| + \|T\| \|y - x\| \\ &\leq p'(1, \|T\|) \cdot p(\|x - y\|, \|Sx - Ty\|) \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \|(S - T)x\| &\leq p'(1, \|T\|) \cdot \text{dist}((x, Sx), T) \\ &\leq p'(1, \|T\|) \cdot \delta(S, T) \cdot \|(x, Sx)\|_p \end{aligned}$$

Mithin ist $\|S - T\|_S \leq p'(1, \|T\|) \cdot \delta(S, T)$.

Zum Beweis von iii) wählen wir $x \in D(T)$ und $y \in D(S)$. Wegen

$$\|x - y\| \leq p(\|x - y\|, \|Tx - Sy\|) = \|(x, Tx) - (y, Sy)\|_p$$

ist $\text{dist}(x, D(S)) \leq \text{dist}((x, Tx), S)$, also

$$\begin{aligned} \text{dist}(x, D(S)) &\leq \delta(T, S) \cdot p(\|x\|, \|Tx\|) \\ &\leq \delta(T, S) \cdot p(\|x\|, \|T\| \|x\|) \\ &\leq \delta(T, S) \cdot p(1, \|T\|) \cdot \|x\| \end{aligned}$$

Mithin ist $\delta(D(T), D(S)) \leq p(1, \|T\|) \cdot \delta(T, S)$. □

Für den folgenden Satz vergleiche man [16], 2.4.6, 2.4.8 und [10], IV, Lemma 2.11, 2.12 und Theorem 2.13.

Satz 1.8 : Es seien $S, T \in \mathcal{O}(X, Y)$, T sei beschränkt und es sei $D := D(S) \cap D(T)$. Dann gilt:

i) Ist $\delta(S, T) < p'(1, \|T\|)^{-1}$, so ist S beschränkt,

$$\|S\| \leq [1 - \delta(S, T) \cdot p'(1, \|T\|)]^{-1} p(1, \|T\|) \quad \text{und}$$

$$\|(S-T)|_D\| \leq [1 - \delta(S, T) \cdot p'(1, \|T\|)]^{-1} p(1, \|T\|) \cdot p'(1, \|T\|) \cdot \delta(S, T)$$

ii) Ist $\delta(T, S) < p(1, \|T\|)^{-1}$ und $D(S) \subset \overline{D(T)}$, so ist

$D(S)$ dicht in $\overline{D(T)}$.

Beweis: Wegen $\delta(S, T) < p'(1, \|T\|)^{-1}$ ist nach Lemma 1.7.i)

$$\begin{aligned} \|Sx\| &\leq \| (x, Sx) \|_p \\ &\leq [1 - p'(1, \|T\|) \cdot \delta(S, T)]^{-1} \cdot p(1, \|T\|) \cdot \|x\| \end{aligned}$$

für alle $x \in D(S)$ und zusammen mit Lemma 1.7.ii) ist

$$\|(S-T)x\| \leq [1 - \delta(S, T) p'(1, \|T\|)]^{-1} p(1, \|T\|) \cdot p'(1, \|T\|) \cdot \delta(S, T) \cdot \|x\|$$

für alle $x \in D$. Damit ist auch i) bewiesen.

Wenn $\delta(T, S) < p(1, \|T\|)^{-1}$ ist, haben wir nach Lemma 1.7.iii)

$$\delta(D(T), D(S)) < 1$$

Wegen $D(S) \subset \overline{D(T)}$ folgt mit Lemma 1.3.ii) die Behauptung ii). $\square$

Korollar 1.9 : Sowohl die Menge der beschränkten Operatoren aus $\mathcal{O}(X, Y)$ als auch das System der dicht definierten beschränkten Operatoren ist offen in der Öffnungstopologie von $\mathcal{O}(X, Y)$.

Die erste Behauptung des Korollars folgt unmittelbar aus dem Satz 1.8.i). Ist T dicht definiert und beschränkt, so ist nach Satz 1.8.ii) (mit $\tilde{T}$ statt T) auch $S \in \mathcal{O}(X, Y)$ dicht definiert, falls nur $\delta(T, S) < p(1, \|T\|)^{-1}$ gilt. Zusammen mit der ersten Behauptung folgt nun auch die zweite.

Was die Störung von injektiven Operatoren mit beschränkten Inversen betrifft, gilt folgender Sachverhalt (vgl. [10], S.205).

Satz 1.10 : Es seien $S, T \in \mathcal{O}(X, Y)$, T sei injektiv und T^{-1} sei beschränkt. $N(S)$ bezeichne den Nullraum von S und $R(S)$ bzw. $R(T)$ den Wertebereich von S bzw. T . Dann gilt:

$$i) \|x\| \leq p'(\|T^{-1}\|, 1) \cdot \delta(S, T) \cdot \|(x, Sx)\|_p + \|T^{-1}\| \|Sx\| \quad (x \in D(S))$$

$$ii) \|x\| \leq p'(\|T^{-1}\|, 1) \cdot \delta(S, T) \cdot \|x\| \quad (x \in N(S))$$

Falls $\delta(S, T) < p'(\|T^{-1}\|, 1)^{-1}$ gilt, ist S injektiv.

$$iii) \delta(R(T), R(S)) \leq p(\|T^{-1}\|, 1) \cdot \delta(T, S)$$

Beweis: Die Ungleichung ii) folgt unmittelbar aus der Ungleichung i). Ausserdem kann $N(S)$ wegen ii) nur aus dem Nullelement bestehen, wenn $\delta(S, T) < p'(\|T^{-1}\|, 1)^{-1}$ ist.

Zum Beweis von i) sei $x \in D(S)$ und $y \in D(T)$ gewählt. Dann ist

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq \|x - y\| + \|y\| \leq \|x - y\| + \|T^{-1}\| \|Ty\| \\ &\leq \|x - y\| + \|T^{-1}\| \|Sx - Ty\| + \|T^{-1}\| \|Sx\| \\ &\leq p'(\|T^{-1}\|, 1) \cdot p(\|x - y\|, \|Sx - Ty\|) + \|T^{-1}\| \|Sx\| \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir durch Infimumsbildung über $y \in D(T)$

$$\|x\| \leq p'(\|T^{-1}\|, 1) \cdot \text{dist}((x, Sx), T) + \|T^{-1}\| \|Sx\|$$

und daraus unter Verwendung der Definition von $\delta(S, T)$

$$\|x\| \leq p'(\|T^{-1}\|, 1) \cdot \delta(S, T) \cdot \|(x, Sx)\|_p + \|T^{-1}\| \|Sx\|$$

Mithin ist i) bewiesen.

Sei nun $y \in D(T)$. Wegen $\|Sx - Ty\| \leq \|(x, Sx) - (y, Ty)\|_p$ für alle $x \in D(S)$ ist $\text{dist}(Ty, R(S)) \leq \text{dist}((y, Ty), S)$ und daher nach Definition von $\delta(T, S)$ (siehe (1.5))

$$\begin{aligned} \text{dist}(Ty, R(S)) &\leq \delta(T, S) \cdot p(\|y\|, \|Ty\|) \\ &\leq \delta(T, S) \cdot p(\|T^{-1}\| \|Ty\|, \|Ty\|) \end{aligned}$$

$$= \delta(T, S) \cdot p(\|T^{-1}\|, 1) \cdot \|T_y\|$$

Mithin ist $\delta(R(T), R(S)) \leq p(\|T^{-1}\|, 1) \cdot \delta(T, S)$. $\square$

Korollar 1.11 : Die Menge der injektiven Operatoren mit beschränkten Inversen ist offen in $\mathcal{O}(X, Y)$. Ebenso ist die Menge der injektiven Operatoren mit dichtem Wertebereich und beschränktem Inversen offen bezüglich der Öffnungstopologie von $\mathcal{O}(X, Y)$.

Beweis: Zunächst bedenken wir, dass die Öffnungstopologie unabhängig von der Wahl der Norm $\|\cdot\|_p$ auf $X \times Y$ ist. Wir können daher p zu $p(\zeta_1, \zeta_2) := (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^{1/2}$ spezialisieren. Für injektive Operatoren $S, T \in \mathcal{O}(X, Y)$ gilt dann

$$(1.19) \quad \delta(S, T) = \delta(S^{-1}, T^{-1}), \quad \hat{\delta}(S, T) = \hat{\delta}(S^{-1}, T^{-1})$$

(1.19) folgt deshalb aus Lemma 1.3.iv), weil mit dem isometrischen Isomorphismus $j: X \times Y \rightarrow Y \times X$, $j(x, y) := (y, x)$, die Gleichungen $S^{-1} = j(S)$ und $T^{-1} = j(T)$ gelten. Korollar 1.11 folgt nun unmittelbar aus Satz 1.10.ii), Korollar 1.9 und Formel (1.19). $\square$

Korollar 1.12 : Es sei $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum über $\mathbb{K}$, $X \neq 0$. Weiter sei S ein beliebiger Operator aus $\mathcal{O}(X)$ und es bezeichne $\mathfrak{N}(S) := \{\langle Sx, x \rangle \mid x \in D(S), \|x\| = 1\}$ den numerischen Wertebereich von S . Dann gilt für $\zeta_1, \zeta_2 \in \overline{\mathbb{K} \setminus \mathfrak{N}(S)}$:

$$(1.20) \quad \hat{\delta}(R(S - \zeta_1), R(S - \zeta_2)) \leq \max_{i=1,2} \{1, \text{dist}(\zeta_i, \mathfrak{N}(S))^{-1}\} \cdot |\zeta_1 - \zeta_2|$$

Die Abbildung $\mathbb{K} \setminus \overline{\mathfrak{N}(S)} \rightarrow (\mathcal{U}(X), \hat{\delta}), \zeta \mapsto R(S - \zeta)$ ist stetig und $\text{codim } \overline{R(S - \zeta)} := \dim \frac{X}{R(S - \zeta)}$ ist daher konstant auf den Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{K} \setminus \overline{\mathfrak{N}(S)}$.

Bemerkung: Im Anhang (A5) bringen wir eine Verallgemeinerung von Korollar 1.12.

Beweis: Seien $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{K} \setminus \overline{\mathfrak{N}(S)}$ und $x \in D(S)$, $x \neq 0$, dann ist

$$\begin{aligned} \left\| (S - \zeta_1) \frac{x}{\|x\|} \right\| &\geq \left| \left\langle (S - \zeta_1) \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \right| \\ &= \left| \left\langle S \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle - \zeta_1 \right| \quad (i = 1, 2) \\ &\geq \text{dist}(\zeta_1, \mathfrak{N}(S)) > 0 \end{aligned}$$

Also ist $\|(S - \zeta_1)^{-1}\| \leq \text{dist}(\zeta_1, \mathfrak{N}(S))^{-1}$.

Wegen Satz 1.10.iii) erhalten wir

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(R(S - \zeta_1), R(S - \zeta_2)) &\leq \max_{i=1,2} \{p(\|(S - \zeta_i)^{-1}\|, 1)\} \cdot \hat{\delta}(S - \zeta_1, S - \zeta_2) \\ &\leq \max_{i=1,2} \{p(\text{dist}(\zeta_i, \mathfrak{N}(S))^{-1}, 1)\} \cdot \hat{\delta}(S - \zeta_1, S - \zeta_2) \end{aligned}$$

Wegen Satz 1.6.i) und der Bemerkung 2) zu Lemma 1.5 ist

$$\hat{\delta}(S - \zeta_1, S - \zeta_2) \leq |\zeta_1 - \zeta_2| \quad \text{und daher}$$

$$\hat{\delta}(R(S - \zeta_1), R(S - \zeta_2)) \leq \max_{i=1,2} \{p(\text{dist}(\zeta_i, \mathfrak{N}(S))^{-1}, 1)\} \cdot |\zeta_1 - \zeta_2|$$

Setzen wir nun $p(\zeta_1, \zeta_2) = \max_{i=1,2} |\zeta_i|$ (wegen Lemma 1.4 ist dies

die bestmögliche Wahl von p), so erhalten wir (1.20) und damit die Stetigkeit der Abbildung $\zeta \mapsto R(S - \zeta)$. Wegen Lemma 1.3.v) und [10], IV., Corollary 2.6 ist auch die Funktion $\dim R(S - \zeta)^\perp$ stetig in ζ , also konstant auf den Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{K} \setminus \overline{\mathfrak{N}(S)}$. Nun ist aber (siehe [10], III, Lemma 1.40)

$$\dim R(S - \zeta)^\perp = \text{codim } \overline{R(S - \zeta)}$$

und damit Korollar 1.12 bewiesen. $\square$

Lemma 1.13: Es sei $S: X \rightarrow Y$ ein beschränkter Operator aus $\mathcal{C}(X, Y)$ und M, N seien Untervektorräume von X . Dann gilt:

$$i) \quad \delta(S|M, S|N) \leq p(1, \|S|M+N\|) \cdot \delta(M, N)$$

$$ii) \quad \hat{\delta}(S|M, S|N) \leq p(1, \|S|M+N\|) \cdot \hat{\delta}(M, N)$$

Beweis: Die Behauptung ii) folgt aus i) durch Vertauschen von M und N . Um i) zu beweisen, wählen wir $x \in M, y \in N$ und schätzen ab:

$$\begin{aligned} p(\|x-y\|, \|Sx-Sy\|) &\leq p(\|x-y\|, \|S|M+N\|\|x-y\|) \\ &\leq p(1, \|S|M+N\|) \cdot \|x-y\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{also } \text{dist}((x, Sx), S|N) &\leq p(1, \|S|M+N\|) \cdot \text{dist}(x, N) \\ &\leq p(1, \|S|M+N\|) \cdot \delta(M, N) \cdot \|x\| \\ &\leq p(1, \|S|M+N\|) \cdot \delta(M, N) \cdot \|(x, Sx)\|_p \end{aligned}$$

Mithin ist $\delta(S|M, S|N) \leq p(1, \|S|M+N\|) \cdot \delta(M, N)$. $\square$

Satz 1.14 : Seien $A, S, T \in \mathcal{O}(X, Y)$ und sei A beschränkt. Es gelte $D(S) \cup D(T) \subset D(A)$, und D sei der von $D(S) \cup D(T)$ aufgespannte Untervektorraum von X . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \delta(S+A, T+A) &\leq (1 + \|A|D\|)(1 + \|A\|_{S+A}) \cdot \delta(S, T) \\ \text{ii)} \quad \hat{\delta}(S+A, T+A) &\leq (1 + \|A\|)^2 \cdot \hat{\delta}(S, T) \end{aligned}$$

Bemerkung: Man vergleiche auch [10], IV, Theorem 2.17. Wegen $(1 + \|A\|)^2 < 2(1 + \|A\|^2)$ für $\|A\| \neq 1$ ist die Ungleichung ii) echt besser als die von T. Kato angegebene Abschätzung.

Beweis: Wegen $\|A|D\| \leq \|A\|$ und $\|A\|_{R+A} \leq \|A\|$ für $R \in \mathcal{O}(X, Y)$ folgt ii) aus i) durch Vertauschen. Zum Beweis von i) betrachten wir $x \in D(S+A) = D(S)$ und $y \in D(T+A) = D(T)$. Es ist

$$\begin{aligned} \text{dist}((x, (S+A)x), T+A) &\leq p(\|x-y\|, \|Sx + Ax - Ay - Ty\|) \\ &\leq p(\|x-y\|, \|Sx - Ty\|) + \|A(x-y)\| \\ &\leq (1 + \|A|D\|) \cdot p(\|x-y\|, \|Sx - Ty\|) \end{aligned}$$

Durch Infimumsbildung erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{dist}((x, (S+A)x), T+A) &\leq (1 + \|A|D\|) \cdot \text{dist}((x, Sx), T) \\ &\leq (1 + \|A|D\|) \cdot \delta(S, T) \cdot p(\|x\|, \|Sx\|) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Wegen } p(\|x\|, \|Sx\|) &\leq p(\|x\|, \|S+A\|x\|) + \|Ax\| \\ &\leq (1 + \|A\|_{S+A}) \cdot p(\|x\|, \|(S+A)x\|) \quad \text{ist nun} \end{aligned}$$

$\text{dist}((x, (S+A)x), T+A) \leq (1 + \|A\|_D)(1 + \|A\|_{S+A}) \cdot \delta(S, T) \cdot \|(x, (S+A)x)\|_p$

und daher $\delta(S+A, T+A) \leq (1 + \|A\|_D)(1 + \|A\|_{S+A}) \cdot \delta(S, T)$.

Mithin ist Satz 1.14 bewiesen. $\square$

Satz 1.15. ist eine leichte Verallgemeinerung von [10], IV, Theorem 2.29.

Satz 1.15 : Es seien X, Y, Z Banachräume über K , D sei ein Untervektorraum von Z und es sei $T, T' \in \mathcal{O}(X, Y)$. Es seien U, U' beschränkte, lineare Operatoren von D in X und V, V' beschränkte lineare Operatoren von D in Y so, dass $R(U) = D(T)$, $R(U') = D(T')$ und $T \circ U = V$, $T' \circ U' = V'$. Weiter besitze die Abbildung $(U, V) : D \rightarrow X \times Y, x \mapsto (Ux, Vx)$ ein beschränktes Inverses. Dann gilt:

$$(\circ) \quad \hat{\delta}(T, T') \leq 2\|(U, V)^{-1}\| \cdot [\|U - U'\| + \|V - V'\|]$$

Bemerkungen: 1) Ist in Satz 1.15 $D = Z$, T abgeschlossen und (U, V) injektiv, so ist $(U, V)^{-1}$ nach dem Satz vom inversen Operator automatisch beschränkt.

2) Der Operator (U, V) ist genau dann injektiv, wenn U injektiv ist.

Beweis: Wegen $\hat{\delta} \leq 1$ genügt es $(\circ)$ nur für solche U', V' zu beweisen, für die $\|U - U'\| + \|V - V'\| \leq \frac{1}{2}\|(U, V)^{-1}\|^{-1}$ gilt. Zunächst ist für $x \in D$

$$\|(U, V)x - (U', V')x\|_p \leq \|(U - U')x\| + \|(V - V')x\| \leq [\|U - U'\| + \|V - V'\|] \cdot \|x\|$$

und daher $\|(U, V) - (U', V')\| \leq \|U - U'\| + \|V - V'\|$.

(eigentlich hängt $\|(U, V) - (U', V')\|$ von p ab, doch machen wir dies nicht eigens deutlich). Eine leichte Rechnung, welche im Anhang (A2) ausgeführt wird, zeigt nun: Ist $\Psi : D \rightarrow X \times Y$ ein beschränkter, linearer Operator und $\|(U, V) - \Psi\| < \frac{1}{2}\|(U, V)^{-1}\|^{-1}$, so besitzt Ψ ein beschränktes Inverses und es gilt

$$\|\Psi^{-1}\| \leq 2\|(U, V)^{-1}\|$$

Falls also $\|U - U'\| + \|V - V'\| \leq \frac{1}{2}\|(U, V)^{-1}\|^{-1}$ ist, besitzt (U', V') ein beschränktes Inverses mit

$$\|(U', V')^{-1}\| \leq 2\|(U, V)^{-1}\|$$

Für solche U', V' ist $(U, V) \circ (U', V')^{-1} \in \mathfrak{B}(G(T'), G(T))$ und $(U', V') \circ (U, V)^{-1} \in \mathfrak{B}(G(T), G(T'))$, also nach Lemma 1.3.iii)

$$\begin{aligned} \delta(T, T') &\leq \|\text{id} - (U', V') \circ (U, V)^{-1}\| \\ &\leq \|(U, V) - (U', V')\| \|(U, V)^{-1}\| \end{aligned}$$

und analog $\delta(T', T) \leq \|(U', V') - (U, V)\| \|(U', V')^{-1}\|$

Mithin ist $\hat{\delta}(T, T') \leq 2\|(U, V)^{-1}\| \cdot [\|U - U'\| + \|V - V'\|]$ □

Im folgenden Lemma geben wir eine hinreichende Bedingung dafür an, dass für $S, T \in \mathcal{O}(X, Y)$ die Schar $S + \omega T$ stetig in ω ist.

Lemma 1.16 : Es seien $S, T \in \mathcal{O}(X, Y)$ und $\Omega := \{\omega \in \mathbb{K} \mid \|T\|_{S+\omega T} < \infty\}$

Dann gilt:

- i) Es ist $\|T\|_{S+\omega' T} \leq [1 - |\omega - \omega'| \cdot \|T\|_{S+\omega T}]^{-1} \cdot \|T\|_{S+\omega T}$
für alle $\omega \in \Omega$ und solche $\omega' \in \mathbb{K}$, welche die Ungleichung $|\omega - \omega'| \cdot \|T\|_{S+\omega T} < 1$ erfüllen. Die Menge Ω ist daher offen.
- ii) Die Abbildung $\Omega \rightarrow \mathcal{O}(X, Y)$, $\omega \rightarrow S + \omega T$ ist stetig, denn es ist $\hat{\delta}(S + \omega T, S + \omega' T) \leq 2|\omega - \omega'| \cdot \|T\|_{S+\omega T}$
für alle $\omega \in \Omega$ und $\omega' \in \mathbb{K}$.
- iii) Gilt für alle $x \in D(T) \cap D(S)$ eine Abschätzung der Form $\|Tx\| \leq a\|x\| + b\|Sx\|$ mit Zahlen $a, b > 0$, so ist $\{\omega \in \mathbb{K} \mid |\omega| < 1/b\} \subset \Omega$.

Bemerkungen: 1) In Lemma 1.16 ist zu beachten, dass für alle $\omega \in \mathbb{K}$ die Gleichung $D(S + \omega T) = D(S) \cap D(T)$ gilt.

2) Ist T abschliessbar und $S + \omega T$ abgeschlossen, so ist nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ([10], IV, Remark 1.5) $\|T\|_{S+\omega T} < \infty$, also $\omega \in \Omega$.

Beweis: Nach Satz 1.6 ist für $\omega' \in \mathbb{K}$ und $\omega \in \Omega$

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(S+\omega T, S+\omega' T) &\leq 2 \|S+\omega T - (S+\omega' T)\|_{S+\omega T} \\ &\leq 2 |\omega - \omega'| \cdot \|T\|_{S+\omega T} \end{aligned}$$

Hieraus folgt wegen $\|T\|_{S+\omega T} < \infty$ die Behauptung ii).

Sei $x \in D(S) \cap D(T)$, dann ist

$$\begin{aligned} \|Tx\| &\leq a\|x\| + b\|Sx\| \\ &\leq a\|x\| + b\|(S+\omega T)x\| + b|\omega| \|Tx\| \end{aligned}$$

also $\|Tx\| \leq (1 - b|\omega|)^{-1} [a\|x\| + b\|(S+\omega T)x\|] \quad (|\omega| < \frac{1}{b})$

und daher $\|T\|_{S+\omega T} \leq (1 - b|\omega|)^{-1} p'(b, a)$ nach Lemma 1.5.

Zum Beweis von i) wählen wir $x \in D(T) \cap D(S)$, dann gilt

$$\begin{aligned} \|Tx\| &\leq \|T\|_{S+\omega T} p(\|x\|, \|(S+\omega T)x\|) \\ &\leq \|T\|_{S+\omega T} [p(\|x\|, \|(S+\omega' T)x\|) + |\omega - \omega'| \cdot \|Tx\|] \end{aligned}$$

Hieraus folgt mit $|\omega - \omega'| \cdot \|T\|_{S+\omega T} < 1$

$$\|Tx\| \leq (1 - |\omega - \omega'| \cdot \|T\|_{S+\omega T})^{-1} \|T\|_{S+\omega T} \cdot \|(x, (S+\omega' T)x)\|_p$$

und damit die Behauptung i) . $\square$

Für Banachräume X, Y bezeichne $\mathcal{B}(X, Y)$ den normierten Raum der linearen, beschränkten Operatoren (auf ganz X definiert) von X in Y und $\mathcal{B}_i(X, Y)$ die Menge derjenigen Operatoren aus $\mathcal{B}(X, Y)$, welche ein beschränktes Inverses besitzen. Im folgenden Lemma trage $\mathcal{B}(X, Y) \times \mathcal{O}(X, Y)$ bzw. $\mathcal{B}_i(X, Y) \times \mathcal{O}(X, Y)$ die Produkttopologie.

Lemma 1.17 : Die Abbildungen $\varphi: \mathcal{B}(X, Y) \times \mathcal{O}(X, Y) \rightarrow \mathcal{O}(X, Y)$,

$\varphi(A, T) := A + T$, und $\psi: \mathcal{B}_i(X, Y) \times \mathcal{O}(X, Y) \rightarrow \mathcal{O}(X, Y)$, $\psi(A, T) := A \circ T$,

sind beide stetig.

Beweis: Wählen wir $A, B \in \mathcal{B}(X, Y)$ und $S, T \in \mathcal{O}(X, Y)$, so ist

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}(\varphi(A, S), \varphi(B, T)) &\leq \hat{\alpha}(\varphi(A, S), \varphi(A, T)) + \hat{\alpha}(\varphi(A, T), \varphi(B, T)) \\ &\leq 2 \{ \hat{\delta}(A+S, A+T) + \hat{\delta}(A+T, B+T) \} \quad (\text{nach (1.10)}) \end{aligned}$$

$$\leq 2 \{ (1 + \|A\|)^2 \cdot \hat{\delta}(S, T) + \|A - B\| \}$$

Die letzte Ungleichung gilt wegen Satz 1.14.ii) und wegen Formel (1.17). Mithin ist φ stetig.

Zum Beweis der Stetigkeit von ψ setzen wir zusätzlich voraus, dass A, B in $\mathcal{B}_c(X, Y)$ liegen und schätzen ab

$$\begin{aligned} \hat{d}(\psi(A, S), \psi(B, T)) &\leq \hat{d}(\psi(A, S), \psi(A, T)) + \hat{d}(\psi(A, T), \psi(B, T)) \\ &\leq 2 \{ \hat{\delta}(A \circ S, A \circ T) + \hat{\delta}(A \circ T, B \circ T) \} \end{aligned}$$

$$\text{Wegen} \quad \hat{\delta}(A \circ T, B \circ T) \leq 2 \cdot \|A \circ T - B \circ T\|_{A \circ T} \quad (\text{Satz 1.6.iii)})$$

$$\text{und} \quad \|A \circ T - B \circ T\|_{A \circ T} \leq \|A - B\| \|A^{-1}\| \quad (\text{siehe anschliessend})$$

$$\text{erhalten wir} \quad \hat{\delta}(A \circ T, B \circ T) \leq 2 \cdot \|A^{-1}\| \|A - B\|.$$

Die vorletzte Ungleichung ergibt sich dabei so:

$$\begin{aligned} \|(A \circ T - B \circ T)x\| &\leq \|A - B\| \|Tx\| \\ &\leq \|A - B\| \|A^{-1}\| \|(A \circ T)x\| \\ &\leq \|A - B\| \|A^{-1}\| \| (x, (A \circ T)x) \|_p \quad (x \in D(T)) \end{aligned}$$

Hieraus folgt unmittelbar obige Ungleichung. Um $\hat{\delta}(A \circ S, A \circ T)$ abzuschätzen, gehen wir so vor: Für $x \in D(S)$ und $y \in D(T)$ ist

$$\begin{aligned} p(\|x - y\|, \|(A \circ S)x - (A \circ T)y\|) &\leq p(\|x - y\|, \|A\| \|Sx - Ty\|) \\ &\leq \max\{1, \|A\|\} \cdot p(\|x - y\|, \|Sx - Ty\|) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Also} \quad \text{dist}((x, (A \circ S)x), A \circ T) &\leq \max\{1, \|A\|\} \cdot \text{dist}((x, Sx), T) \\ &\leq \max\{1, \|A\|\} \cdot \delta(S, T) \cdot p(\|x\|, \|Sx\|) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Zusammen mit} \quad p(\|x\|, \|Sx\|) &\leq p(\|x\|, \|A^{-1}\| \|(A \circ S)x\|) \\ &\leq \max\{1, \|A^{-1}\|\} \cdot \|(x, (A \circ S)x)\|_p \end{aligned}$$

$$\text{erhalten wir} \quad \delta(A \circ S, A \circ T) \leq \max\{1, \|A\|\} \cdot \max\{1, \|A^{-1}\|\} \cdot \delta(S, T)$$

Dieselbe Ungleichung gilt auch für $\hat{\delta}$; mithin ist:

$$\hat{d}(\psi(A, S), \psi(B, T)) \leq 2 \{ 2 \|A^{-1}\| \|A - B\| + (\max\{1, \|A\|, \|A^{-1}\|\})^2 \cdot \hat{\delta}(S, T) \}$$

woraus die Stetigkeit von ψ gefolgert werden kann. $\square$

Die Stetigkeit von φ gestattet es, nichttriviale Folgerungen zu ziehen, die in Satz 1.18 zusammengefasst sind. Für einen

Operator $T \in \mathcal{O}(X)$ bezeichnen wir $\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid T - \lambda I \in \mathcal{J}(X)\}$ als Resolventenmenge von T und $\sigma(T) := \mathbb{K} \setminus \rho(T)$ als das Spektrum von T . Dabei ist $\mathcal{J}(X)$ die Menge der injektiven Operatoren aus $\mathcal{O}(X)$, die ein beschränktes, dicht definiertes Inverses besitzen.

Für den folgenden Satz vergleiche man [10], IV, Theorem 3.1 und 3.15, sowie V, Theorem 4.1.

Satz 1.18 : Seien $S, T \in \mathcal{O}(X)$ und sei $\varphi: \mathbb{K} \times \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathcal{O}(X)$ definiert durch $\varphi(\lambda, T) := T - \lambda I$. Dann gelten folgende Aussagen:

- i) $\varphi^{-1}(\mathcal{J}(X))$ ist offen in $\mathbb{K} \times \mathcal{O}(X)$ und $\rho(T)$ ist offen in $\mathbb{K}$. Die Resolventenabbildung $R: \varphi^{-1}(\mathcal{J}(X)) \rightarrow \mathcal{O}(X)$, $R(\lambda, T) := (T - \lambda I)^{-1}$, ist stetig.
- ii) Zu jedem Kompaktum $K \subset \rho(T)$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $S \in \mathcal{O}(X)$ mit $\hat{\delta}(S, T) < \varepsilon$ das Kompaktum K in $\rho(S)$ liegt.
- iii) Aus $\hat{\delta}(S, T) = 0$ folgt $\rho(T) = \rho(S)$ und $\sigma(T) = \sigma(S)$.
- iv) Ist X ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$, so ist die Menge der wesentlich selbstadjungierten Operatoren offen in der Menge $\mathfrak{S}(X)$ der symmetrischen Operatoren, aufgefasst als Teilraum von $(\mathcal{O}(X), \hat{\delta})$. *)

Beweis: i) $\varphi^{-1}(\mathcal{J}(X))$ ist offen in $\mathbb{K} \times \mathcal{O}(X)$, da φ stetig und $\mathcal{J}(X)$ offen in $\mathcal{O}(X)$ ist (nach Lemma 1.17 und Korollar 1.11). Analog ist $\rho(T) = \varphi(\cdot, T)^{-1}(\mathcal{J}(X))$ offen in $\mathbb{K}$. Die Stetigkeit von R ergibt sich aus der Gleichung

$$\hat{\delta}(R(\lambda, S), R(\mu, T)) = \hat{\delta}(S - \lambda I, T - \mu I) = \hat{\delta}(\varphi(\lambda, S), \varphi(\mu, T))$$

und der Stetigkeit von φ (auf $X \times X$ wurde die Norm $\|(x, y)\| = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2}$ gewählt, weshalb obige Gleichung nach (1.19) gültig ist).

ii) Es ist $K \subset \rho(T)$ äquivalent mit $K \times \{T\} \subset \varphi^{-1}(\mathcal{J}(X))$, also nach Voraussetzung $K \times \{T\} \subset \varphi^{-1}(\mathcal{J}(X))$. Da $\varphi^{-1}(\mathcal{J}(X))$ offen und

*) Zur Definition der wesentlichen Selbstadjungiertheit und der Symmetrie eines linearen Operators siehe Seite 33.

K kompakt ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass

$$K \times \{S \mid S \in \mathcal{O}(X), \widehat{\delta}(T, S) < \varepsilon\} \subset \varphi^{-1}(\mathcal{T}(X))$$

Das bedeutet aber gerade, dass $K \subset \rho(S)$ ist für alle $S \in \mathcal{O}(X)$ mit $\widehat{\delta}(T, S) < \varepsilon$.

iii) Sei $\lambda \in \rho(T)$ und $K_\lambda := \{\lambda\}$. Nach ii) gibt es $\varepsilon_\lambda > 0$ mit $K_\lambda \subset \rho(S)$, falls $\widehat{\delta}(T, S) < \varepsilon_\lambda$ ist. Wegen $\widehat{\delta}(T, S) = 0$ ist daher $\lambda \in \rho(S)$, also $\rho(T) \subset \rho(S)$. Vertauscht man noch T und S , so erhält man $\rho(S) = \rho(T)$ und damit $\sigma(S) = \sigma(T)$.

iv) Sei $\widehat{\varphi} : \mathbb{C} \times \mathcal{S}(X) \rightarrow \mathcal{O}(X)$ definiert durch $\widehat{\varphi}(\lambda, T) := T - \lambda I$. $\widehat{\varphi}$ ist als Einschränkung von φ stetig. Nun ist aber bekanntlich (siehe [10], V, Problem 3.17):

$$\begin{aligned} T \text{ wesentlich selbstadjungiert} & \iff T \pm iI \in \mathcal{T}(X) \\ & \iff T \in \bigcap_{\lambda = \pm i} \widehat{\varphi}(\lambda, \cdot)^{-1}(\mathcal{T}(X)) \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $\bigcap_{\lambda = \pm i} \widehat{\varphi}(\lambda, \cdot)^{-1}(\mathcal{T}(X))$ offen in $\mathcal{S}(X)$. □

§ 2 Anwendung der Öffnungstopologie auf stetige Störungen linearer Operatoren und ihrer Adjungierten.

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, über einfache Stetigkeitsbetrachtungen in der Öffnungstopologie hauptsächlich bekannte (wesentliche) Selbstadjungiertheitskriterien einheitlich zu gewinnen und das Problem zu untersuchen, für welche $A, B \in \mathcal{O}(X, Y)$ und $\omega \in \mathbb{K}$ die Gleichung

$$(A + \omega B)^* = A^* + \omega^* B^* \quad (\omega^* \text{ konjugiert-komplex zu } \omega)$$

gilt. Angeregt durch Überlegungen von J. Weidmann [20] (persönliche Mitteilung) geben wir einen besonders einfachen Beweis des folgenden zentralen Satzes, der für $\Omega = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t \leq 1\}$ und für den Fall abgeschlossener Operatoren von P. Hess und T. Kato ([9], Theorem, S.524) aufgestellt wurde.

Für einen Banachraum X sei X^* (siehe [10], III, § 1.4) der Banachraum der stetigen Antilinearformen auf X versehen mit der Norm

$$\|x^*\| := \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x^*, x \rangle| \quad (x^* \in X^*)$$

wobei die Semilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $X^* \times X$ durch die Formel $\langle x^*, x \rangle := x^*(x)$ gegeben sei. Wenn $S \in \mathcal{O}(X, Y)$ dicht definiert ist, erklären wir S^* durch

$$D(S^*) := \{y^* \in Y^* \mid \text{Es gibt } x^* \in X^* \text{ mit } \langle y^*, Sx \rangle = \langle x^*, x \rangle \quad (x \in D(S))\}$$

$$S^* y^* := x^*$$

Man sieht sofort, dass S^* wohldefiniert ist, zu $\mathcal{O}(Y^*, X^*)$ gehört, und dass für $x \in D(S), y^* \in D(S^*)$ die Gleichung (2.1) gilt.

$$(2.1) \quad \langle y^*, Sx \rangle = \langle S^* y^*, x \rangle$$

Wegen (2.1) nennt man S^* die Adjungierte zu S . Die Definition von S^* ist dabei so eingerichtet, dass S^* gerade die Hilbert-

raumadjungierte zu S darstellt, falls $X=Y$ Hilberträume sind und X (bzw. Y) mit X^* (bzw. Y^*) identifiziert wird.

Da wir in diesem Paragraphen das Produkt zweier Banachräume stets durch $\|(x,y)\| := (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2}$ normieren, ist $Y^* \times X^*$ isometrisch isomorph zu $(X \times Y)^*$ vermöge (siehe Anhang (A3))

$$\langle j(y^*, x^*), (x, y) \rangle := \langle y^*, y \rangle - \langle x^*, x \rangle$$

Setzen wir wie bisher lineare Operatoren mit ihren Graphen gleich, so ist mit obiger Abbildung $j: Y^* \times X^* \rightarrow (X \times Y)^*$ wegen Formel (2.1)

$$j(S^*) = S^\perp$$

Mit diesen Vorbemerkungen können wir nun den wichtigen Satz 2.1 formulieren.

Satz 2.1 : Es seien X, Y Banachräume über K , Ω sei ein topologischer zusammenhängender Raum. Es seien $A: \Omega \rightarrow \mathcal{O}(X, Y)$ und $B: \Omega \rightarrow \mathcal{O}(Y^*, X^*)$ stetige Abbildungen. Für alle $\omega \in \Omega$ sei $A(\omega)$ dicht definiert und $B(\omega) \subset A(\omega)^*$, und für ein $\omega_0 \in \Omega$ gelte sogar ${}^+) \overline{B(\omega_0)} = A(\omega_0)^*$.

Dann ist $\overline{B(\omega)} = A(\omega)^*$ für alle $\omega \in \Omega$.

Bemerkung: Dieser Satz wurde für $\Omega = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t \leq 1\}$ und für den Fall, dass $A(\omega)$ und $B(\omega)$ abgeschlossen sind, von P. Hess und T. Kato ([9], Theorem, S.524) bewiesen. Obwohl Satz 2.1 allgemeiner als das Resultat von Hess-Kato ist und diese allgemeine Fassung (Satz 2.1) beim Beweis eines Resultats von F.E. Browder (siehe § 3) auch wesentlich benutzt wird, ist doch zu fragen, ob die Verallgemeinerung des Resultats von Hess-Kato auf nicht kurvenzusammenhängende Räume Ω und nicht abschliessbare $A(\omega)$ in den Anwendungen sich als fruchtbar erweist.

Zum Beweis von Satz 2.1 benötigen wir das für sich interessante

Lemma 2.2 : Sei X ein Banachraum über K und Ω ein topologisch zusammenhängender Raum. Es seien $M, N: \Omega \rightarrow (\mathcal{U}(X), \hat{d})$ stetige Ab-

+) Für einen abschliessbaren Operator T bezeichne $\tilde{T}$ die Abschliessung von T .

bildungen. Für alle $\omega \in \Omega$ sei $M(\omega) \subset \overline{N(\omega)}$, und für ein $\omega_0 \in \Omega$ sei $\overline{M(\omega_0)} = \overline{N(\omega_0)}$.

Dann ist $\overline{M(\omega)} = \overline{N(\omega)}$ für alle $\omega \in \Omega$.

Beweis von Lemma 2.2 : Wir betrachten die Abbildung $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $h(\omega) := \hat{d}(M(\omega), N(\omega))$, welche offensichtlich stetig ist, und die nach Voraussetzung nicht leere Menge

$$\Omega_0 := \{\omega \mid \omega \in \Omega, \overline{M(\omega)} = \overline{N(\omega)}\}$$

Wegen $\Omega_0 = h^{-1}(\{0\})$ ist Ω_0 abgeschlossen. Die Offenheit von Ω_0 ergibt sich aus der Gleichung $\Omega_0 = h^{-1}(\{t \mid t \in \mathbb{R}, -1 < t < 1\})$. Zum Nachweis dieser Gleichung ist $h^{-1}(\{t \mid t \in \mathbb{R}, -1 < t < 1\}) \subset \Omega_0$ nachzuprüfen. Sei also $-1 < h(\omega) < 1$, dann ist wegen (1.9) und (1.10)

$$\delta(N(\omega), M(\omega)) < 1$$

Mit Hilfe von Lemma 1.3.11) folgt hieraus aber $\overline{M(\omega)} = \overline{N(\omega)}$, also $\omega \in \Omega_0$. Da Ω zusammenhängend ist, muss $\Omega = \Omega_0$ sein. $\square$

Beweis von Satz 2.1 : Wir wenden Lemma 2.2. an mit $X = Y^* \times X^*$, $M(\omega) = B(\omega)$ und $N(\omega) = A(\omega)^*$ (wobei wir $B(\omega)$ und $A(\omega)^*$ mit ihren Graphen identifizieren). Somit ist

$$M(\omega) \subset \overline{N(\omega)}, \quad \overline{M(\omega_0)} = \widetilde{B(\omega_0)} = A(\omega_0)^* = N(\omega_0) = \overline{N(\omega_0)}$$

Die Stetigkeit von M ist unmittelbar klar, wohingegen sich die Stetigkeit von N aus folgenden Gleichheiten ergibt. Es ist

$$\hat{\delta}_{Y^* \times X^*}(N(\omega), N(\omega')) = \hat{\delta}_{(X \times Y)^*}(A(\omega)^\perp, A(\omega')^\perp)$$

nach Lemma 1.3.1v), da $Y^* \times X^*$ isometrisch isomorph zu $(X \times Y)^*$ vermöge j ist (siehe Anhang (A3)) und $j(A(\omega)^*) = A(\omega)^\perp$ gilt. Die Gleichung

$$\hat{\delta}_{(X \times Y)^*}(A(\omega)^\perp, A(\omega')^\perp) = \hat{\delta}(A(\omega), A(\omega'))$$

ergibt sich aus Lemma 1.3.v). Beide Gleichungen zusammen zeigen, dass auch N stetig ist. Nach Lemma 2.2 ist nun

$$\overline{M(\omega)} = \overline{N(\omega)} \quad (\omega \in \Omega)$$

also $\widetilde{B(\omega)} = \overline{M(\omega)} = \overline{N(\omega)} = N(\omega) = A(\omega)^*$ für alle $\omega \in \Omega$. $\square$

Als unmittelbare Folgerung aus Lemma 2.2 erhalten wir ein Resultat über die Invarianz des Kernbereichs eines abgeschlossenen Operators.

Gemäss T. Kato ([10], III, §5.3) nennen wir jeden Untervektorraum $D \subset D(T)$ eines abgeschlossenen Operators T einen Kernbereich ("core"), wenn $\overline{T|D} = T$ gilt.

Korollar 2.3 : Seien X, Y Banachräume über K . Sei Ω ein topologisch zusammenhängender Raum und $A : \Omega \rightarrow \mathcal{O}(X, Y)$ eine in der Öffnungstopologie von $\mathcal{O}(X, Y)$ stetige Familie abgeschlossener Operatoren. Es sei D ein Untervektorraum von X , $D \subset D(A(\omega))$ für alle $\omega \in \Omega$ und $A|D : \Omega \rightarrow \mathcal{O}(X, Y)$, $(A|D)(\omega) := A(\omega)|D$, stetig in der Öffnungstopologie von $\mathcal{O}(X, Y)$. Für ein $\omega_0 \in \Omega$ sei D ein Kernbereich von $A(\omega_0)$.

Dann ist D ein Kernbereich von $A(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$.

Beweis: Für $\omega \in \Omega$ sei $M(\omega) := A(\omega)|D$ und $N(\omega) := A(\omega)$. Offensichtlich erfüllen M, N alle Voraussetzungen von Lemma 2.2 und daher ist

$$\overline{(A(\omega)|D)} = \overline{M(\omega)} = \overline{N(\omega)} = A(\omega) \quad (\omega \in \Omega)$$

Mithin ist D Kernbereich von $A(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$. $\square$

Folgerung 2.4 : Es seien X, Y Banachräume über K , $A, B \in \mathcal{O}(X, Y)$ und $D \subset D(A) \cap D(B)$ ein Untervektorraum von X . Es sei B abschliessbar und $\Omega := \{\omega \mid \omega \in K, A + \omega B \text{ abgeschlossen}\}$. Für jede Zusammenhangskomponente $Z(\Omega)$ von Ω gilt dann die Alternative: Entweder ist D Kernbereich von $A + \omega B$ für alle $\omega \in Z(\Omega)$ oder dies ist für kein $\omega \in Z(\Omega)$ wahr.

Bemerkungen: 1) Wir erinnern daran, dass $D(A + \omega B) = D(A) \cap D(B)$ ist für alle $\omega \in K$, also speziell $A + 0 \cdot B = A| (D(A) \cap D(B))$. Nur für $D(A) \subset D(B)$ ist daher $A + 0 \cdot B = A$.

2) Folgerung 2.4 ist auch ohne die Voraussetzung "B ist abschliessbar" richtig, wie wir später (Lemma 2.8) sehen werden.

Beweis: Sei $\omega \in \Omega$, also $A + \omega B$ abgeschlossen. Weil für dieses ω $D(A + \omega B) \subset D(B)$ gilt und B abschliessbar ist, ist ([10], IV, Remark 1.5) der Operator B $(A + \omega B)$ -beschränkt, d.h. aber $\|B\|_{A + \omega B} < \infty$. Nun ist nach Lemma 1.16.11)

$$\widehat{\delta}(A + \omega B, A + \omega' B) \leq 2 \|\omega - \omega'\| \cdot \|B\|_{A + \omega B} \quad (\omega, \omega' \in \Omega)$$

und (siehe Satz 1.6.iii))

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}((A + \omega B)|_D, (A + \omega' B)|_D) &\leq 2 \|(\omega - \omega') B|_D\|_{A + \omega B} \\ &\leq 2 \|(\omega - \omega') B\|_{A + \omega B} \\ &\leq 2 \|\omega - \omega'\| \|B\|_{A + \omega B} \end{aligned}$$

Wir sehen somit, dass die Abbildungen $\omega \rightarrow (A + \omega B)|_D$ und $\omega \rightarrow A + \omega B$ stetig in $\omega \in \Omega$ sind. Mit Korollar 2.3 folgt nun die Behauptung. $\square$

Die bekannten Selbstadjungiertheitskriterien von F. Rellich und T. Kato ([18], [10], S.287-288) folgen nun direkt aus Satz 2.1 und Lemma 1.16.iii). Dabei haben Satz 2.1 und Lemma 1.16.iii) einfache Beweise.

Wir nennen einen dicht definierten Operator $S \in \mathcal{O}(X)$ (X sei ein Hilbertraum über K) symmetrisch, wenn $S \subset S^*$ ist. Ein symmetrischer Operator S heisst (wesentlich-) selbstadjungiert, wenn gilt

$$(\widetilde{S} = S^*) \quad S = S^*$$

Korollar 2.5 (Rellich-Kato): Es sei X ein Hilbertraum über K , A sei ein wesentlich selbstadjungierter (selbstadjungierter) und B ein symmetrischer Operator aus $\mathcal{O}(X)$ mit $D(A) \subset D(B)$. Es gebe Zahlen $a, b > 0$ so, dass für alle $x \in D(A)$

$$(2.1) \quad \|Bx\| \leq a\|x\| + b\|Ax\|$$

Dann gilt für alle $\omega \in K$ mit $|\omega| < \frac{1}{b}$

$$\begin{aligned} (A + \omega B)^* &\supset \widetilde{A + \omega B} = \widetilde{A} + \omega^* \widetilde{B} \\ &= \left((A + \omega B)^* = A + \omega^* B \right) \end{aligned}$$

Insbesondere ist $A + \omega B$ wesentlich selbstadjungiert (selbstadjungiert) für alle $\omega \in \mathbb{R}$ mit $|\omega| < \frac{1}{b}$.

Beweis: Sei $\Omega := \{\omega \mid \omega \in \mathbb{K}, |\omega| < \frac{1}{b}\}$, $A(\omega) := A + \omega B$ und $B(\omega) := \tilde{A} + \omega^* \tilde{B}$ für $\omega \in \Omega$. Aus (2.1) erhält man durch "Abschliessen"

$$D(\tilde{A}) \subset D(\tilde{B})$$

$$(2.2) \quad \|\tilde{B}x\| \leq a\|x\| + b\|\tilde{A}x\| \quad (x \in D(\tilde{A}))$$

und damit

$$(2.3) \quad (A + \omega B)^* \supset \overline{A + \omega^* \tilde{B}} \supset \tilde{A} + \omega^* \tilde{B}$$

Somit ist stets $A(\omega)^* \supset B(\omega)$ und $A(0)^* = B(0) = \overline{B(0)}$, da A wesentlich selbstadjungiert und $D(\tilde{A}) \subset D(\tilde{B})$ ist. Nach Lemma 1.16 iii) sind wegen (2.1) und (2.2) sowohl $A(\omega)$ als auch $B(\omega)$ stetig in $\omega \in \Omega$. Wegen Satz 2.1 ist daher $A(\omega)^* = \overline{B(\omega)}$ für $\omega \in \Omega$. $B(\omega)$ ist aber abgeschlossen, wie nachfolgende analoge Argumentation zeigt. Also gilt in (2.3) überall das Gleichheitszeichen.

Sei nun A selbstadjungiert. Wegen

$$\|(\omega B)x\| \leq |\omega|a\|x\| + |\omega|b\|Ax\| \quad (x \in D(A))$$

ist $A + \omega B$ abgeschlossen für alle $|\omega| < \frac{1}{b}$ (siehe [10], IV. Theorem 1.1), da A als selbstadjungierter Operator abgeschlossen ist. Mithin ist $\overline{A + \omega^* \tilde{B}} = A + \omega^* \tilde{B}$ für $|\omega| < \frac{1}{b}$, falls A selbstadjungiert ist, und damit alles bewiesen. $\square$

Bemerkung: Es ist vielleicht zu erwähnen, dass die Gültigkeit der Gleichung $(A + \omega B)^* = \overline{A + \omega^* \tilde{B}}$ für $|\omega| < \frac{1}{b}$ noch unmittelbarer zu sehen ist (falls $\omega \in \mathbb{R}$ ist, bedeutet dies die wesentliche Selbstadjungiertheit von $A + \omega B$). Die Symmetrie von A und B impliziert nämlich $(A + \omega B)^* \supset A + \omega^* \tilde{B}$ und (2.1) garantiert die Stetigkeit von $A + \omega B$ und damit auch von $A + \omega^* \tilde{B}$.

Korollar 2.6: Sei X ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$, Ω sei ein metrischer Raum mit $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$, wobei Ω_0 zusammenhängend und $\Omega_1 \subset \overline{\Omega_0}$ sei. $A: \Omega \rightarrow \mathfrak{S}(X)$ sei eine Abbildung von Ω in die Menge $\mathfrak{S}(X)$ der symmetrischen Operatoren von X in sich. Für $\omega \in \Omega$ sei $D(A(\omega)) = D$ und für $i=1,2$ gebe es Abbildungen $c_i: \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+^+$ mit

$$\lim_{\substack{\omega' \rightarrow \omega \\ \omega' \in \Omega_0}} c_1(\omega, \omega') = 0 \quad (\omega \in \Omega_0) \quad \text{und} \quad \sup_{\omega' \in \Omega_0} c_1(\omega, \omega') < \infty \quad (\omega \in \Omega_1)$$

und $\|A(\omega)x - A(\omega')x\| \leq c_1(\omega, \omega') \|x\| + c_2(\omega, \omega') \|A(\omega')x\|$
 für $x \in D$ und $\omega, \omega' \in \Omega$. Weiter sei $\lim_{\substack{\omega' \rightarrow \omega \\ \omega' \in \Omega_0}} A(\omega')x = A(\omega)x$

für alle $\omega \in \Omega_1$ und $x \in D$. Dann gilt:

Ist $A(\omega_0)$ wesentlich selbstadjungiert für ein $\omega_0 \in \Omega_0$, so ist $A(\omega)$ wesentlich selbstadjungiert für alle $\omega \in \Omega$.

Bemerkung: Korollar 2.6 lässt sich auch auf topologische Räume Ω ausdehnen.

Beweis: Zunächst sehen wir, dass $A|_{\Omega_0}$ stetig in der Öffnungstopologie von $\mathcal{O}(X)$ ist, denn nach Satz 1.6.iii) und Lemma 1.5 ist

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(A(\omega), A(\omega')) &\leq 2\|A(\omega) - A(\omega')\|_{A(\omega')} \\ &\leq 2[c_1(\omega, \omega')^2 + c_2(\omega, \omega')^2]^{1/2} \end{aligned}$$

Wegen $A(\omega) \subset A(\omega)^*$, $\overline{A(\omega_0)} = A(\omega_0)^*$ ist nach Satz 2.1 $A(\omega)$ wesentlich selbstadjungiert für alle $\omega \in \Omega_0$.

Sei nun $\omega \in \Omega_1$. Da $\Omega_1 \subset \overline{\Omega_0}$ ist, gibt es eine Folge $(\omega_n) \subset \Omega_0$ mit $\omega_n \rightarrow \omega$. Nach dem eben Bewiesenen ist $A(\omega_n)$ wesentlich selbstadjungiert und nach Voraussetzung konvergiert die Folge $(A(\omega_n))$ stark gegen $A(\omega)$. Ausserdem haben wir noch wegen Lemma 1.5

$$\|A(\omega_n) - A(\omega)\|_{A(\omega_n)} \leq [(\sup_{n \in \mathbb{N}} c_1(\omega, \omega_n))^2 + (\sup_{n \in \mathbb{N}} c_2(\omega, \omega_n))^2]^{1/2} < \infty$$

Mit Hilfe des folgenden Lemma 2.7 sehen wir nun, dass $A(\omega)$ wesentlich selbstadjungiert ist. Mithin ist Korollar 2.6 bewiesen. $\square$

Lemma 2.7: Sei X ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$ und seien A_n, A Operatoren aus $\mathcal{O}(X)$ mit $D(A_n) \subset D(A)$. Es sei A_n wesentlich selbstadjungiert, A sei symmetrisch und es gebe eine in X dichte Menge $D \subset D(A_n)$ so, dass $\|A_n x - A x\| \rightarrow 0$ strebt für alle $x \in D$. Schliesslich sei $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n - A\|_{A_n} < \infty$.

Dann ist A wesentlich selbstadjungiert.

Beweis: Wir benutzen eine Idee von R. Wüst [21]. Für $\mu \in \{+1, -1\}$ zeigen wir, dass der Wertebereich $R(A - \mu I)$ dicht in X ist, woraus bekanntlich die wesentliche Selbstadjungiertheit von A folgt. Sei also $y \in R(A - \mu I)^\perp$. Da die A_n wesentlich selbstadjungiert sind, gibt es $x_n \in D(A_n)$ so, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n - \mu I)x_n = y$$

Nun ist wegen der Symmetrie von A_n und wegen $\mu \in \{+1, -1\}$

$$\|(A_n - \mu I)x_n\|^2 = \|A_n x_n\|^2 + \|x_n\|^2 = \|(x_n, A_n x_n)\|^2$$

$$\text{also } \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|(x_n, A_n x_n)\| = \|y\|$$

Andererseits gilt wegen $D(A_n) \subset D(A)$ und $y \in R(A - \mu I)^\perp$

$$\|y\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle y, (A_n - \mu I)x_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle y, (A_n - A)x_n \rangle$$

Da D dicht ist, gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $y_\varepsilon \in D$ mit $\|y - y_\varepsilon\| \leq \varepsilon$. Wir erhalten nun ($A_n - A$ ist symmetrisch!)

$$\begin{aligned} \|y\|^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} [\langle y - y_\varepsilon, (A_n - A)x_n \rangle + \langle y_\varepsilon, (A_n - A)x_n \rangle] \\ &\leq \|y - y_\varepsilon\| \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \|(A_n - A)x_n\| + [\lim_{n \rightarrow \infty} \|(A_n - A)y_\varepsilon\|] \cdot \|y\| \\ &\leq \varepsilon \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \|(A_n - A)x_n\| + 0 \cdot \|y\| \end{aligned}$$

$$\text{denn } \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \leq \|y\| \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|(A_n - A)y_\varepsilon\| = 0.$$

Nun ist aber $\|(A_n - A)x_n\| \leq \|A_n - A\|_{A_n} \cdot \|(x_n, A_n x_n)\|$, also

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|(A_n - A)x_n\| \leq \gamma \cdot \|y\| \quad (\text{wobei } \gamma = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n - A\|_{A_n})$$

und damit erhalten wir $\|y\| \leq \gamma \varepsilon$.

Da ε beliebig war, ist $y = 0$, also ist A wesentlich selbstadjungiert. $\square$

Bemerkungen: 1) Lemma 2.7 wurde für den Fall, dass A_n selbstadjungiert und $D = D(A_n) = D(A)$ ist, von R. Wüst [21] gezeigt.

R. Wüst konnte damit folgendes Resultat beweisen:

Sei X ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$, es seien $S, T \in \mathcal{O}(X)$. S sei wesentlich selbstadjungiert, T symmetrisch mit $D(S) \subset D(T)$ und es gelte mit $a > 0$

$$(2.4) \quad \|Tx\| \leq a\|x\| + \|Sx\| \quad (x \in D(S))$$

Dann ist $S+T$ wesentlich selbstadjungiert.

(Man vergleiche auch [10], V, Theorem 4.6)

Dieses Resultat von R. Wüst lässt sich aus Korollar 2.6 wieder gewinnen.

Wir setzen $\Omega_0 = \{\omega \mid \omega \in \mathbb{R}, 0 \leq \omega < 1\}$, $\Omega_1 = \{1\}$ und $A(\omega) = S + \omega T$. Für $\omega' \in \Omega_0$, $\omega \in \overline{\Omega_0}$ und $x \in D(S)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \|A(\omega)x - A(\omega')x\| &= |\omega - \omega'| \cdot \|Tx\| \\ &\leq |\omega - \omega'| \cdot [a\|x\| + \|Sx\|] \\ &\leq |\omega - \omega'| \cdot [a\|x\| + \|A(\omega')x\| + \omega'\|Tx\|] \\ &\leq |\omega - \omega'| \cdot [a\|x\| + \|A(\omega')x\|] + \omega' \|A(\omega)x - A(\omega')x\| \end{aligned}$$

$$\text{also } \|A(\omega)x - A(\omega')x\| \leq [1 - \omega']^{-1} \cdot |\omega - \omega'| \cdot [a\|x\| + \|A(\omega')x\|]$$

Aus letzter Gleichung folgt wegen Korollar 2.6, dass $S + \omega T$ wesentlich selbstadjungiert ist für alle $0 \leq \omega \leq 1$. $\square$

2) Lemma 2.7 lässt sich, wie man durch eine Beweisanalyse sieht, noch folgendermassen abschwächen:

Sei X ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$ und seien A_n, A symmetrische Operatoren aus $\mathcal{O}(X)$ mit $D(A_n) \subset D(A)$. Es gebe eine in X dichte Teilmenge $D \subset D(A_n)$ so, dass $\|A_n x - Ax\| \rightarrow 0$ für alle $x \in D$. Schliesslich sei $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n - A\|_{A_n} < \infty$ und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Ist dann $N(A_n^* - \lambda I) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $N(A^* - \lambda I) = 0$

Seien nun X, Y Banachräume über $\mathbb{K}$, A, B seien Operatoren aus $\mathcal{O}(X, Y)$ und für $\omega \in \mathbb{K}$ bezeichne ω^* das Konjugiert-Komplexe (in $\mathbb{C}$) zu ω . Wir untersuchen die Frage, wann (2.5) gilt.

$$(2.5) \quad (A + \omega B)^* = A^* + \omega^* B^*$$

Wegen der immer gültigen Relation $(A + \omega B)^* \supset A^* + \omega^* \cdot B^*$ und der Tatsache, dass für $\omega = 0$ Gleichheit (falls $D(A) \subset D(B)$ und $D(A^*) \subset D(B^*)$) in dieser Relation gilt, ist man wegen Satz 2.1 auf die Untersuchung der Stetigkeit der Scharen $A + \omega B$ und $A^* + \omega^* B^*$ geführt. Dabei ist für das Problem (2.5) die Stetigkeit der Schar $A^* + \omega^* B^*$ nur in den Punkten ω^* von Interesse, für die $A^* + \omega^* B^*$ ein abgeschlossener Operator in $\mathcal{O}(Y^*, X^*)$ ist. Es ist deshalb sehr naheliegend, für beliebige Operatoren $A, B \in \mathcal{O}(X, Y)$ die Stetigkeit der Abbildung $\omega \rightarrow A + \omega B$ in ihrem Abgeschlossenheitsbereich $\{\omega \mid \omega \in \mathbb{K}, A + \omega B \text{ abgeschl.}\}$ zu untersuchen.

Lemma 2.8: Seien X, Y Banachräume über $\mathbb{K}$ und $A, B \in \mathcal{O}(X, Y)$. Für $\omega \in \mathbb{K}$ sei $A(\omega) := A + \omega B$ und $\Omega := \{\omega \mid \omega \in \mathbb{K}, A(\omega) \text{ abgeschl.}\}$. Dann gelten folgende Aussagen:

- i) Für jeden Untervektorraum $D \subset D(A) \cap D(B)$ ist die Abbildung $\Omega \rightarrow \mathcal{O}(X), \omega \rightarrow A(\omega)|_D$, stetig. Ω ist offen in $\mathbb{K}$, falls Ω mindestens zwei Punkte enthält.
- ii) Ist A abschliessbar, so ist $\Omega \setminus \{0\}$ offen in $\mathbb{K}$.
- iii) Ist A abgeschlossen und $D(A) \subset D(B)$, so ist $0 \in \Omega$.
- iv) Ist A abgeschlossen, $D(A) \subset D(B)$ und gilt mit Zahlen $a, b > 0$ die Ungleichung

$$\|Bx\| \leq a\|x\| + b\|Ax\| \quad (x \in D(A))$$

so ist $\{\omega \mid \omega \in \mathbb{K}, |\omega| < \frac{1}{b}\} \subset \Omega$ und daher Ω offen in $\mathbb{K}$.

Bemerkungen: 1) Die Menge Ω kann sowohl leer, als auch einpunktig sein, wie man an einfachen Beispielen sieht.

2) Die Stetigkeit von $A(\cdot)$ folgt auch aus der Tatsache, dass $(A(\omega))_{\omega \in \Omega}$ eine holomorphe Operatorfamilie vom Typ (A) ist (vgl. [10], S.375). Wir legen hier jedoch Wert auf einen Beweis der Stetigkeit von $A(\cdot)$, welcher keine funktionentheoretischen Hilfsmittel benutzt.

Beweis: Die Aussagen iii) und iv) ergeben sich aus i) und [10],

IV, Theorem 1.1. Zum Nachweis von i) und ii) zeigen wir zunächst, dass aus der Abschliessbarkeit von A die Offenheit von $\Omega \setminus \{0\}$ und die Stetigkeit von $\omega \rightarrow A(\omega)|_D$ in $\Omega \setminus \{0\}$ folgt.

Sei also A abschliessbar, $\Omega \setminus \{0\} \neq \emptyset$ (sonst ist nichts zu beweisen!) und $\omega \in \Omega \setminus \{0\}$. Da $A(\omega)$ abgeschlossen und A abschliessbar ist und $D(A(\omega)) \subset D(A)$ gilt, ist nach [10], IV, Remark 1.5 $\|A\|_{A(\omega)} < \infty$. Sei nun $\omega' \in \mathbb{K}$ und $D \subset D(A) \cap D(B)$ ein Untervektorraum, dann gilt:

$$\begin{aligned} \|A(\omega)|_D - A(\omega')|_D\|_{A(\omega)|_D} &\leq \|A(\omega) - A(\omega')\|_{A(\omega)} \\ &= |\omega|^{-1} \cdot |\omega - \omega'| \cdot \|A(\omega) - A\|_{A(\omega)} \\ &\leq |\omega|^{-1} \cdot |\omega - \omega'| \cdot [1 + \|A\|_{A(\omega)}] \end{aligned}$$

Nach Satz 1.6.iii) folgt die Stetigkeit der Abbildung $\omega' \rightarrow A(\omega')|_D$ im Punkte $\omega \in \Omega \setminus \{0\}$. Dass $\Omega \setminus \{0\}$ offen ist, folgt so: Falls ω' nahe bei ω gewählt wird, ist $\|A(\omega) - A(\omega')\|_{A(\omega)} < \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{d.h.} \quad \|A(\omega)x - A(\omega')x\| &\leq \|A(\omega) - A(\omega')\|_{A(\omega)} \cdot [\|x\|^2 + \|A(\omega)x\|^2]^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot [\|x\| + \|A(\omega)x\|] \end{aligned}$$

und daher $A(\omega')$ abgeschlossen ([10], IV, Theorem 1.1); mithin $\Omega \setminus \{0\}$ offen. Damit ist ii) bewiesen.

Zum Beweis von i) nehmen wir o.E.d.A. an, dass Ω mindestens zwei Punkte enthält, sagen wir $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, $\omega_1 \neq \omega_2$.

Für $i=1,2$ und $\omega \in \mathbb{K}$ sei $\hat{A}_i(\omega) := A(\omega_1) + \omega B$ und $\Omega_{\hat{A}_i} := \{\omega \mid \omega \in \mathbb{K}, \hat{A}_i(\omega) \text{ abgeschlossen}\}$. Wegen

$$D(\hat{A}_i(\omega)) = D(A) \cap D(B) = D(A(\omega)) \quad \text{und} \quad \hat{A}_i(\omega) = A(\omega + \omega_1)$$

$$\text{ist} \quad \Omega_{\hat{A}_i} \setminus \{0\} = -\omega_1 + \Omega \setminus \{\omega_1\}$$

Nach dem eben Bewiesenen ist $\Omega_{\hat{A}_i} \setminus \{0\}$ offen, also ist auch $\Omega \setminus \{\omega_1\}$ offen, und $\hat{A}_i(\cdot)|_D = A(\cdot + \omega_1)|_D$ ist stetig in $\Omega_{\hat{A}_i} \setminus \{0\}$. Wegen $\Omega = (\Omega \setminus \{\omega_1\}) \cup (\Omega \setminus \{\omega_2\})$ ist Ω offen in $\mathbb{K}$ und $A(\cdot)|_D$ stetig in Ω . $\square$

Nun können wir mit Satz 2.9 ein Resultat gewinnen, das Ergebnisse von Hess-Kato [9], Wüst [21], [22], Gustafson-Rejto [8]

und Weidmann [20] umfasst und teilweise erweitert. Dieses Resultat (Satz 2.9) folgt direkt aus Lemma 2.8 und Satz 2.1, also aus einfachen Stetigkeitsbetrachtungen.

Satz 2.9: Es seien X, Y Banachräume über K und A, B seien dicht definierte Operatoren aus $\mathcal{O}(X, Y)$. Es sei A abgeschlossen, $D(A) \subset D(B)$ und $D(A^*) \subset D(B^*)$. Ω sei die Menge aller $\omega \in K$, für die $A + \omega B$ und $A^* + \omega^* B^*$ abgeschlossen ist. Schliesslich sei $Z(\Omega)$ eine Zusammenhangskomponente von Ω . Dann gilt:

- i) Entweder ist $(A + \omega B)^* = A^* + \omega^* B^*$ für alle $\omega \in Z(\Omega)$ oder diese Gleichung ist für kein $\omega \in Z(\Omega)$ richtig. Ist $Z_0(\Omega)$ diejenige Zusammenhangskomponente von Ω , welche 0 enthält, so gilt also für alle $\omega \in Z_0(\Omega)$

$$(\circ) \quad (A + \omega B)^* = A^* + \omega^* B^*$$
- ii) Ist $\omega_1, \omega_2 \in Z(\Omega)$, $D \subset D(A)$ ein Kernbereich von $A + \omega_1 B$, $D^* \subset D(A^*)$ ein Kernbereich von $(A + \omega_2 B)^*$ und gilt für ein $\omega_0 \in Z(\Omega)$ die Gleichung $(\circ)$, so ist für alle $\omega \in Z(\Omega)$ D ein Kernbereich von $A + \omega B$ und D^* ein Kernbereich von $(A + \omega B)^*$.
- iii) Falls Ω wenigstens zwei Elemente enthält, ist Ω und damit auch $Z(\Omega)$ offen in K .

Beweis: Sei $\Omega_1 := \{\omega \mid \omega \in K, A + \omega B \text{ abgeschlossen}\}$ und analog $\Omega_2 := \{\omega \mid \omega \in K, A^* + \omega^* B^* \text{ abgeschlossen}\}$, dann ist $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$. Nach Lemma 2.8.1) ist Ω_1 bzw. Ω_2^* und daher auch Ω offen, falls Ω zwei Punkte enthält. Die Menge $Z(\Omega)$ ist dann natürlich ebenfalls offen in K . Wegen Lemma 2.8.1) sind die Abbildungen $\omega \rightarrow A + \omega B$ (bzw. $\omega \rightarrow (A + \omega B)|_D$) und $\omega \rightarrow A^* + \omega^* B^*$ (bzw. $\omega \rightarrow (A^* + \omega^* B^*)|_{D^*}$) stetig in $\omega \in \Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$.

Stets gilt die Inklusion

$$(A + \omega B)^* \supset A^* + \omega^* B^* \quad (\omega \in K)$$

Nach Satz 2.1 ist daher entweder für kein $\omega \in Z(\Omega)$

$$(A + \omega B)^* = A^* + \omega^* B^*$$

oder dies trifft für alle $\omega \in Z(\Omega)$ zu. Für Elemente $\omega \in Z_0(\Omega)$

gilt die Gleichung $(\circ)$, da

$$(A + 0 \cdot B)^* = A^* = A^* + 0^* B^*$$

Wegen Korollar 2.3 ist D ein Kernbereich von $A + \omega B$ und D^* ein Kernbereich von $A^* + \omega^* B^*$ für alle $\omega \in Z(\Omega)$. Da für $\omega_0 \in Z(\Omega)$ die Gleichung $(\circ)$ gilt, ist für alle $\omega \in Z(\Omega)$ wegen dem schon bewiesenen Teil i)

$$(A + \omega B)^* = A^* + \omega^* B^*$$

Somit ist D^* auch Kernbereich von $(A + \omega B)^*$. $\square$

Korollar 2.10 (J. Weidmann [20]):

Es sei X ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$ und A, B seien dicht definierte Operatoren aus $\mathcal{O}(X)$. Es sei A abgeschlossen, B sei A -beschränkt und B^* sei A^* -beschränkt. Weiter sei $Z_0(\Omega)$ diejenige Zusammenhangskomponente von

$$\Omega := \{\omega \mid \omega \in \mathbb{C}, A + \omega B \text{ und } A^* + \omega^* B^* \text{ abgeschlossen}\},$$

welche die Zahl 0 enthält.

Dann ist $(A + \omega B)^* = A^* + \omega^* B^*$ für alle $\omega \in Z_0(\Omega)$.

Korollar 2.11 (R. Wüst [22], Theorem 2):

Es sei X ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$, A sei ein abgeschlossener und B ein symmetrischer Operator aus $\mathcal{O}(X)$ mit $D(A) \subset D(B)$. Sei $Z(A, B) := \{\omega \mid \omega \in \mathbb{C}, A + \omega B \text{ und } A + \omega^* B \text{ abgeschlossen}\}$

Dann gilt:

i) Für jede Zusammenhangskomponente W von $Z(A, B)$ gilt

$$(A + \omega B)^* = A + \omega^* B$$

entweder für alle $\omega \in W$ oder für kein $\omega \in W$.

ii) Wenn A selbstadjungiert ist und $Z_0(A, B)$ diejenige Zusammenhangskomponente von $Z(A, B)$ bezeichnet, welche die Zahl 0 enthält, so gilt für alle $\omega \in Z_0(A, B)$

$$(A + \omega B)^* = A + \omega^* B$$

Insbesondere ist $A + \omega B$ selbstadjungiert für alle $\omega \in Z_0(A, B) \cap \mathbb{R}$.

Bemerkungen: 1) Korollar 2.11 umfasst natürlich Theorem 1, [21], von R. Wüst.

2) Aus Satz 2.1 folgt auch unmittelbar Theorem 1, [22], von R. Wüst, wenn man bedenkt, dass eine selbstadjungierte holomorphe Operatorfamilie vom Typ (A) stetig in der Öffnungstopologie von $\mathcal{O}(X)$ ist (vgl. [10], VII, (2.4), S.376).

Beweis von Korollar 2.11: ii) ist eine unmittelbare Folgerung von Satz 2.9, denn es gilt $A + \omega^*B = A^* + \omega^*B^*$, da $D(A^*) = D(A) \subset D(B) \subset D(B^*)$ ist. Daher ist $Z(A, B) = \Omega$ und $Z_0(A, B) = Z_0(\Omega)$. Die Aussage i) erhalten wir aus Satz 2.1, da $\omega \rightarrow A + \omega B$ und $\omega \rightarrow A + \omega^*B$ stetig in $\omega \in Z(A, B)$ nach Lemma 2.8 sind. $\square$

Korollar 2.12 (K.E. Gustafson und P.A. Rejto [8], Corollary 3.4): Es sei $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$, A, B seien Operatoren aus $\mathcal{O}(X)$. A sei selbstadjungiert, B sei symmetrisch und $D(A) \subset D(B)$. Mit Zahlen $a, b > 0$, $b < 1$ gelte

$$- \operatorname{Re} \langle Ax, Bx \rangle \leq a \|x\|^2 + b \|Ax\| \|Bx\| \quad (x \in D(A))$$

Dann ist $A + \omega B$ selbstadjungiert für alle $\omega \geq 0$.

Bemerkung: Das Ergebnis von Gustafson-Rejto liegt hier in partiell verallgemeinerter Form vor.

Beweis: Da $A + \omega B = A^* + \omega^*B^*$ für alle $\omega \in \mathbb{R}$ gilt, genügt es nach Satz 2.9.i) zu zeigen, dass $A + \omega B$ abgeschlossen ist für alle $\omega \geq 0$. Sei also $\omega \geq 0$ und $x \in D(A)$, dann ist

$$\begin{aligned} \|(A + \omega B)x\|^2 &= \|Ax\|^2 + \omega^2 \|Bx\|^2 + 2\omega \operatorname{Re} \langle Ax, Bx \rangle \\ &\geq \|Ax\|^2 + \omega^2 \|Bx\|^2 - 2\omega a \|x\|^2 - 2\omega b \|Ax\| \|Bx\| \\ &\geq \|Ax\|^2 + \omega^2 \|Bx\|^2 - 2\omega a \|x\|^2 - \omega^2 \|Bx\|^2 - b^2 \|Ax\|^2 \\ &\geq (1 - b^2) \|Ax\|^2 - 2\omega a \|x\|^2 \end{aligned}$$

Wegen $b < 1$ folgt nun daraus

$$(*) \quad \|Ax\|^2 \leq (1 - b^2)^{-1} [2\omega a \|x\|^2 + \|(A + \omega B)x\|^2]$$

Ist nun $(x_n) \subset D(A + \omega B) = D(A)$, $x_n \rightarrow x$ und $(A + \omega B)x_n \rightarrow y$, so

folgt aus (*), dass die Folge (Ax_n) konvergent ist. Wegen der Abgeschlossenheit von A ist $x \in D(A)$ und $Ax_n \rightarrow Ax$. Da auch B A -beschränkt ist ([10], IV, Remark 1.5), folgt $Bx_n \rightarrow Bx$. Insgesamt konvergiert daher $(A + \omega B)x_n$ gegen $(A + \omega B)x$. Mithin ist $A + \omega B$ abgeschlossen.

Korollar 2.13 (P. Hess und T. Kato [9], Proposition S.529):

Es seien X, Y Banachräume über $\mathbb{K}$, $A, B \in \mathcal{O}(X, Y)$. Es sei $D(A)$ dicht in X , $D(A) \subset D(B)$ und $D(A^*) \subset D(B^*)$. Für alle $0 \leq \omega \leq 1$ seien $A + \omega B$ und $A^* + \omega B^*$ abgeschlossen.

Dann ist $(A + B)^* = A^* + B^*$.

Korollar 2.14 (P. Hess und T. Kato [9], Corollary 2):

Es seien X, Y Banachräume über $\mathbb{K}$, A, B seien abgeschlossene Operatoren aus $\mathcal{O}(X, Y)$ und D sei dicht in X . Es sei D ein Kernbereich von A , D^* ein Kernbereich von A^* . Weiter sei $D \subset D(B)$ und $D^* \subset D(B^*)$ so, dass

$$(2.6) \quad \|Bx\| \leq a\|x\| + b\|Ax\| \quad (x \in D)$$

$$(2.7) \quad \|B^*y\| \leq a\|y\| + b\|A^*y\| \quad (y \in D^*)$$

gilt mit $0 \leq b < 1$.

Dann ist $A + B$ abgeschlossen und $D(A + B) = D(A)$. Ausserdem ist $(A + B)^* = A^* + B^*$, $D((A + B)^*) = D(A^*)$ und D bzw. D^* ist Kernbereich von $A + B$ bzw. $(A + B)^*$.

Beweis: Durch "Abschliessen" von (2.6) bzw. (2.7) folgt

$$D(A) \subset D(\overline{B|D}) \subset D(B), \quad \|Bx\| \leq a\|x\| + b\|Ax\| \quad (x \in D(A))$$

$$D(A^*) \subset D(\overline{B^*|D^*}) \subset D(B^*), \quad \|B^*y\| \leq a\|y\| + b\|A^*y\| \quad (y \in D(A^*))$$

Also ist $A + \omega B$ bzw. $A^* + \omega^* B^*$ abgeschlossen für alle $|\omega| < \frac{1}{b}$ ([10], IV, Theorem 1.1). Aus Satz 2.9.1) und ii) folgt nun die Behauptung, denn es ist $\frac{1}{b} > 1$ und

$$\{\omega \mid \omega \in \mathbb{K}, |\omega| < \frac{1}{b}\} \subset Z_0(\Omega).$$

§ 3 Stetige Störungen von abstrakt-elliptischen Randwertproblemen

In diesem Paragraphen betrachten wir von F.E. Browder [4] eingeführte abstrakt-elliptische Randwertprobleme und "stetige Störungen" davon. Im Gegensatz zu Browder zeigen wir, dass die dortigen ([4]) stetigen Störungen auch stetige Störungen in der Öffnungstopologie von $\mathcal{O}(X)$ bedingen, woraus dann sehr leicht mit Hilfe von Satz 2.1 das Hauptresultat ([4], Theorem 1) von F.E. Browder folgt. Was die Bedeutung und die Anwendbarkeit solcher abstrakt-elliptischer Randwertprobleme anbelangt, verweisen wir auf [4].

Es seien zwei Banachräume $(X_0, \|\cdot\|_0)$, $(X, \|\cdot\|)$ über $\mathbb{K}$ gegeben mit der Eigenschaft, dass $X_0 \subset X$ dicht in dem reflexiven Banachraum X liegt und die Einbettung $(X_0, \|\cdot\|_0) \hookrightarrow (X, \|\cdot\|)$ stetig ist. Sei Y ein Banachraum über $\mathbb{K}$.

Definition 3.1 (vgl. [4], S.738):

Unter einem abstrakt-elliptischen Randwertproblem über (X_0, X) mit Randdatenraum Y verstehen wir ein Operatorenpaar (A, γ) mit folgenden Eigenschaften:

- i) A ist ein linearer, beschränkter Operator von X_0 in X .
- ii) γ ist ein linearer, beschränkter Operator von X_0 auf Y .
- iii) Der Nullraum $N(\gamma)$ von γ ist dicht in X .
- iv) Es gibt ein $c = c(A, \gamma) > 0$ so, dass für $x \in X_0$ gilt

$$\|x\|_0 \leq c [\|x\| + \|Ax\| + \|\gamma x\|]$$

Bemerkung: Von den Bedingungen i)-iv) in dieser Definition ist hauptsächlich iv) sehr restriktiv, denn sie bedeutet das Bestehen einer a priori-Abschätzung. Bei konkreten elliptischen Randwertproblemen zeigt sich (Agmon-Douglis-Nirenberg [2]), dass der Beweis der a priori-Abschätzung gerade das Hauptproblem darstellt.

Jedem abstrakt-elliptischen Randwertproblem (Bez. AERWP) (A, γ) über (X_0, X) mit Randdatenraum Y ordnen wir zwei Operatoren

$[A, \gamma]$ und A_γ zu durch folgende Festsetzung

$$[A, \gamma]x := (Ax, \gamma x) \quad (x \in X_0)$$

$$D(A_\gamma) := N(\gamma), \quad A_\gamma x := Ax \quad (x \in D(A_\gamma))$$

Man sieht leicht, dass $[A, \gamma]$ ein linearer, beschränkter Operator von X_0 in $X \times Y$ und A_γ ein dicht definierter Operator aus $\mathcal{O}(X)$ ist.

Die folgenden wichtigen, aber leicht zu zeigenden Eigenschaften der Operatoren $[A, \gamma]$ und A_γ findet man im wesentlichen schon bei F.E. Browder [4] (allerdings verstreut und weniger differenziert).

Lemma 3.2 : Es sei (A, γ) ein AERWP über (X_0, X) mit Randdatenraum Y . Dann gilt:

- 1) Für $A' \in \mathcal{B}(X_0, X)$ und $\gamma' \in \mathcal{B}(X_0, Y)$ mit $\|A - A'\| + \|\gamma - \gamma'\| \leq \frac{1}{2}c$ (wobei c aus Def.3.1.iv) stammt) gilt

$$\|x\|_0 \leq 2c \cdot [\|x\| + \|A'x\| + \|\gamma'x\|] \quad (x \in X_0)$$

- ii) A_γ ist ein abgeschlossener Operator aus $\mathcal{O}(X)$.

- iii) Die Nullräume $N(A_\gamma)$ und $N([A, \gamma])$ sind gleich. Sie haben endliche Dimension, falls die Einbettung $X_0 \hookrightarrow X$ kompakt ist. *)

- iv) Die Wertebereiche $R(A_\gamma)$ und $R([A, \gamma])$ besitzen gleiche Kodimension. Falls die Einbettung $X_0 \hookrightarrow X$ kompakt ist, sind $R(A_\gamma)$ und $R([A, \gamma])$ abgeschlossen und daher A_γ und $[A, \gamma]$ Semi-Fredholmoperatoren mit gleichem Index. +)

Den Beweis von Lemma 3.2 führen wir im Anhang (A⁴) aus.

Definition 3.3 (vgl. [4]): Es sei (A, γ) ein AERWP über (X_0, X) mit Randdatenraum Y , (A', γ') sei ein AERWP über (X'_0, X') mit randdatenraum Y' . Der adjungierte Raum X^* sei isometrisch iso-

*) Zur Definition der Kompaktheit eines linearen Operators siehe [10], III, S.157.

+) Zur Definition von Semi-Fredholmoperatoren siehe [10], S.230.

morph zu X' . Wir nennen (A, γ) , (A', γ') zueinander formaladjungiert, wenn gilt:

$$\langle x', A_\gamma x \rangle = \langle A'_{\gamma'} x', x \rangle \quad (x \in D(A_\gamma), x' \in D(A'_{\gamma'}))$$

Dabei ist X' mit X^* zu identifizieren und $A'_{\gamma'}$ als Operator aus der Klasse $\mathcal{O}(X^*)$ aufzufassen.

Bemerkung: (A, γ) und (A', γ') sind offensichtlich genau dann zueinander formaladjungiert, wenn gilt (bei den entsprechenden Identifizierungen natürlich):

$$A'_{\gamma'} \subset (A_\gamma)^* \quad \text{oder äquivalent dazu} \quad A_\gamma \subset (A'_{\gamma'})^*$$

Für zueinander formaladjungierte Paare (A, γ) , (A', γ') von abstrakt-elliptischen Randwertproblemen stellen sich nun folgende Fragen (man denke etwa an Dirichletprobleme für elliptische Differentialoperatoren):

(3.1) Sind $[A, \gamma]$ und A_γ (bzw. $[A', \gamma']$ und $A'_{\gamma'}$) Fredholmoperatoren?

(3.2) Wann gilt die Gleichung $A'_{\gamma'} = (A_\gamma)^*$?

Wegen Lemma 3.2.iii) und iv) lässt sich (3.1) dann leicht bejahen, wenn die Gleichung $A'_{\gamma'} = (A_\gamma)^*$ gilt. Somit ist (3.2) das entscheidende Problem.

Eine Antwort auf (3.2) gab F.E. Browder [4]. Er konnte zeigen, dass die Gültigkeit der Gleichung $A'_{\gamma'} = (A_\gamma)^*$ stabil gegenüber "stetigen Störungen" von (A, γ) und (A', γ') ist.

Definition 3.4 (vgl. [4]): Es sei Ω ein topologischer Raum und zu jedem $\omega \in \Omega$ sei ein AERWP $(A(\omega), \gamma(\omega))$ auf (X_0, X) mit Randdatenraum Y gegeben. Die Familie $(A(\omega), \gamma(\omega))_{\omega \in \Omega}$ nennen wir stetig, wenn die Abbildung $\omega \rightarrow [A(\omega), \gamma(\omega)]$ eine stetige Abbildung von Ω in $\mathcal{B}(X_0, X \times Y)$ ist.

Durch Anwendung von Satz 2.1 können wir Theorem 1, [4], von F.E. Browder kurz beweisen und auf Banachräume verallgemeinern. Konkret bedeutet diese Verallgemeinerung, dass man z.B. Dirichlet-Probleme statt wie bisher in $L_2(G)$ nun in $L_p(G)$

betrachtet.

Satz 3.5 : Sei Ω ein topologisch zusammenhängender Raum.

Gegeben seien zwei stetige Familien $(A(\omega), \gamma(\omega))_{\omega \in \Omega}$ bzw.

$(A'(\omega), \gamma'(\omega))_{\omega \in \Omega}$ von abstrakt-elliptischen Randwertproblemen

über (X_0, X) bzw. (X'_0, X') mit Randdatenraum Y bzw. Y' . Für

alle $\omega \in \Omega$ sei $(A(\omega), \gamma(\omega))$ formaladjungiert zu $(A'(\omega), \gamma'(\omega))$

und für ein $\omega_0 \in \Omega$ sei

$$A'(\omega_0)_{\gamma'(\omega_0)} = (A(\omega_0)_{\gamma(\omega_0)})^*$$

Dann ist $A'(\omega)_{\gamma'(\omega)} = (A(\omega)_{\gamma(\omega)})^*$ für alle $\omega \in \Omega$.

Sind die Einbettungen $X_0 \hookrightarrow X$, $X'_0 \hookrightarrow X'$ kompakt, so gilt noch:

i) Für jedes $\omega \in \Omega$ sind $[A(\omega), \gamma(\omega)]$ bzw. $[A'(\omega), \gamma'(\omega)]$ und $A(\omega)_{\gamma(\omega)}$ bzw. $A'(\omega)_{\gamma'(\omega)}$ Fredholmoperatoren mit von ω unabhängigen Index.

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad \text{ind } [A(\omega), \gamma(\omega)] &= \text{ind } A(\omega)_{\gamma(\omega)} & *) \\ \text{ind } [A'(\omega), \gamma'(\omega)] &= \text{ind } A'(\omega)_{\gamma'(\omega)} & (\omega \in \Omega) \\ \text{ind } A'(\omega)_{\gamma'(\omega)} &= -\text{ind } A(\omega)_{\gamma(\omega)} \end{aligned}$$

Zum Beweis von Satz 3.5 benötigen wir entscheidend

Lemma 3.6 : Es sei (A, γ) ein AERWP auf (X_0, X) mit Randdatenraum Y . Dann gibt es ein $\varepsilon = \varepsilon(A, \gamma) > 0$ und ein $d = d(A, \gamma) > 0$ so, dass für jedes weitere AERWP (B, δ) (auf (X_0, X) mit Randdatenraum Y) für das $\|A - B\| + \|\gamma - \delta\| \leq \varepsilon$ ist, folgende Abschätzung gilt:

$$(3.3) \quad \hat{\delta}(A_\gamma, B_\delta) \leq d[\|A - B\| + \|\gamma - \delta\|]$$

$\hat{\delta}$ ist dabei die Öffnungsfunktion in $\mathcal{O}(X)$ (nicht in $\mathcal{O}(X_0, X)$).

Beweis: Da $X_0 \hookrightarrow X$ stetig ist, gibt es ein a , das wir o.E.d.A. grösser gleich 1 annehmen können, mit

$$\|x\| \leq a\|x\|_0 \quad (x \in X_0)$$

*) Zur Definition von Fredholmoperatoren und deren Index siehe [10], IV, S.230.

Daher ist für $x \in D(A_\gamma)$ und $y \in D(B_\delta)$

$$\|x - y\|^2 + \|A_\gamma x - B_\delta y\|^2 \leq a^2 [\|x - y\|_0^2 + \|A_\gamma x - B_\delta y\|^2]$$

also $\text{dist}_{X \times X}((x, A_\gamma x), B_\delta) \leq a \cdot \text{dist}_{X \times X}((x, A_\gamma x), B_\delta)$ und damit

$$\begin{aligned} \text{dist}_{X \times X}((x, A_\gamma x), B_\delta) &\leq a \cdot \delta_{X \times X}(A_\gamma, B_\delta) \cdot [\|x\|_0^2 + \|Ax\|^2]^{1/2} \\ &\leq a \cdot \sqrt{2 \cdot c(A, \gamma)^2 + 1} \cdot \delta_{X \times X}(A_\gamma, B_\delta) \cdot [\|x\|^2 + \|Ax\|^2]^{1/2} \end{aligned}$$

Die letzten beiden Ungleichungen basieren auf der Definition von $\delta_{X \times X}$ und auf der Ungleichung aus Definition 3.1.iv). Somit erhalten wir

$$\delta_{X \times X}(A_\gamma, B_\delta) \leq a \cdot \sqrt{2 \cdot c(A, \gamma)^2 + 1} \cdot \delta_{X \times X}(A_\gamma, B_\delta)$$

Vertauscht man A_γ mit B_δ und benutzt man noch Lemma 3.2.1), so ist insgesamt

$$(3.5) \quad \hat{\delta}_{X \times X}(A_\gamma, B_\delta) \leq a \cdot \sqrt{8 \cdot c(A, \gamma)^2 + 1} \cdot \hat{\delta}_{X \times X}(A_\gamma, B_\delta)$$

falls nur $\|A - B\| + \|\gamma - \delta\| \leq [2 \cdot c(A, \gamma)]^{-1}$ ist.

Nun schätzen wir $\hat{\delta}_{X \times X}(A_\gamma, B_\delta)$ weiter ab. Wegen (1.3), (1.10), (1.17) und Lemma 1.13.ii) gilt:

$$\begin{aligned} (3.6) \quad \frac{1}{2} \cdot \hat{\delta}_{X \times X}(A_\gamma, B_\delta) &\leq \hat{\delta}_{X \times X}(A_\gamma, A_\delta) + \hat{\delta}_{X \times X}(A_\delta, B_\delta) \\ &\leq (1 + \|A\|^2)^{1/2} \cdot \hat{\delta}_{X_0}(N(\gamma), N(\delta)) + \|A - B\| \end{aligned}$$

Die Gleichungen $N(\gamma)^\perp = R(\gamma^*)$, $N(\delta)^\perp = R(\delta^*)$ und Lemma 1.3.v) ergeben die Beziehung (3.7)

$$(3.7) \quad \hat{\delta}_{X_0}(N(\gamma), N(\delta)) = \hat{\delta}_{X_0^*}(R(\gamma^*), R(\delta^*))$$

Die Surjektivität von γ bzw. δ bewirkt, dass $R(\gamma^*)$ bzw. $R(\delta^*)$ abgeschlossen ist. Ausserdem ist γ^* bzw. δ^* injektiv, da $N(\gamma^*) = R(\gamma)^\perp$ bzw. $N(\delta^*) = R(\delta)^\perp$ gilt. Nach dem Satz vom beschränkten Inversen sind daher γ^{*-1} , δ^{*-1} beschränkt. Falls $\|\gamma - \delta\| = \|\gamma^* - \delta^*\| \leq \frac{1}{2} \|\gamma^{*-1}\|^{-1}$ ist, haben wir (siehe Anhang (A2))

$$\|\delta^{*-1}\| \leq 2 \cdot \|\gamma^{*-1}\|$$

Mit Hilfe von Satz 1.10.iii) erhalten wir nun

$$\begin{aligned}
 \widehat{\delta}_{X_0^*}(R(\gamma^*), R(\delta^*)) &\leq (1 + 4\|\gamma^{*-1}\|^2)^{1/2} \widehat{\delta}_{X_0^*}(\gamma^*, \delta^*) \\
 (3.8) \qquad \qquad \qquad &\leq (1 + 4\|\gamma^{*-1}\|^2)^{1/2} \|\gamma^* - \delta^*\| \\
 &\leq (1 + 4\|\gamma^{*-1}\|^2)^{1/2} \|\gamma - \delta\|
 \end{aligned}$$

wobei wir auch Formel (1.17) benutzt haben. Stecken wir endlich die Abschätzungen (3.5) bis (3.8) zusammen, so ist mit einem geeigneten $d = d(A, \gamma) > 0$ und $\varepsilon = \varepsilon(A, \gamma) > 0$

$$\widehat{\delta}(A_\gamma, B_\delta) \leq d[\|A - B\| + \|\gamma - \delta\|] \quad \square$$

Beweis von Satz 3.5 : Aus der Abschätzung (3.3) von Lemma 3.6 sieht man unmittelbar, dass die Abbildung $\omega \rightarrow A(\omega)_{\gamma(\omega)}$ bzw. $\omega \rightarrow A'(\omega)_{\gamma'(\omega)}$ stetig in der zugehörigen Öffnungstopologie ist. Da für alle $\omega \in \Omega$ $(A(\omega), \gamma(\omega))$ formaladjungiert zu $(A'(\omega), \gamma'(\omega))$ ist und für ω_0 die Gleichung $A'(\omega_0)_{\gamma'(\omega_0)} = (A(\omega_0)_{\gamma(\omega_0)})^*$ gilt, folgt aus Satz 2.1 für alle $\omega \in \Omega$

$$(3.9) \qquad A'(\omega)_{\gamma'(\omega)} = (A(\omega)_{\gamma(\omega)})^*$$

Aus (3.9) ergeben sich nun die Gleichungen

$$(3.10) \quad R(A(\omega)_{\gamma(\omega)})^\perp = N((A(\omega)_{\gamma(\omega)})^*) = N(A'(\omega)_{\gamma'(\omega)})$$

$$(3.11) \quad R(A'(\omega)_{\gamma'(\omega)})^\perp = N((A'(\omega)_{\gamma'(\omega)})^*) = N(A(\omega)_{\gamma(\omega)})$$

Sind nun die Einbettungen $X_0 \hookrightarrow X$, $X_0' \hookrightarrow X'$ kompakt, so ist wegen Lemma 3.2.iii), iv) und (3.10), (3.11) (siehe auch [10], III, Lemma 1.40)

$$\text{codim } R(A(\omega)_{\gamma(\omega)}) = \dim N(A'(\omega)_{\gamma'(\omega)}) < \infty$$

$$\text{codim } R(A'(\omega)_{\gamma'(\omega)}) = \dim N(A(\omega)_{\gamma(\omega)}) < \infty$$

Also ist $A(\omega)_{\gamma(\omega)}$ bzw. $A'(\omega)_{\gamma'(\omega)}$ ein Fredholmoperator. Wegen Lemma 3.2.iii) und iv) sind $[A(\omega), \gamma(\omega)]$ bzw. $[A'(\omega), \gamma'(\omega)]$ Fredholmoperatoren mit den Eigenschaften ii) aus Satz 3.5, wobei die Gleichung $\text{ind } A'(\omega)_{\gamma'(\omega)} = -\text{ind } A(\omega)_{\gamma(\omega)}$ aus (3.9) und [10],

IV, Corollary 5.14 folgt. Da die auf dem zusammenhängenden Raum Ω definierte, ganzzahlige Abbildung $\omega \rightarrow \text{ind } [A(\omega), \gamma(\omega)]$ stetig ist, folgt

$$\text{ind } [A(\omega), \gamma(\omega)] = \text{ind } [A(\omega_0), \gamma(\omega_0)]$$

für alle $\omega \in \Omega$. Mithin ist wegen der schon bewiesenen Eigenschaft ii) von Satz 3.5 alles bewiesen.

Anhang

(A1) Lemma 1.4: Es seien X, Y Banachräume über K . p sei eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ mit den Eigenschaften $p(1,0)=1=p(0,1)$ und $p(\zeta_1, \zeta_2) = p(|\zeta_1|, |\zeta_2|)$ für alle $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}$. Für $x \in X, y \in Y$ sei $\|(x,y)\|_p := p(\|x\|, \|y\|)$. Dann gilt:

i) $\|\cdot\|_p$ ist Norm auf $X \times Y$.

ii) $\max_{i=1,2} |\zeta_i| \leq p(|\zeta_1|, |\zeta_2|)$ für alle $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}$.

iii) $p(\zeta_1, \zeta_2) \leq p(\eta_1, \eta_2)$ für alle $0 \leq \zeta_i \leq \eta_i, i=1,2$.

Beweis: Wir zeigen zunächst iii). Offensichtlich ist es hinreichend, wenn wir $p(\zeta_1, \zeta_2) \leq p(\eta_1, \zeta_2)$ für $0 \leq \zeta_1 \leq \eta_1$ nachweisen. Wegen $0 \leq \zeta_1 \leq \eta_1$ gibt es ein $t \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ so, dass:

$$\zeta_1 = (2t-1)\eta_1 \text{ oder äquivalent } \zeta_1 = t\eta_1 + (1-t)(-\eta_1)$$

Nun erhalten wir

$$\begin{aligned} p(\zeta_1, \zeta_2) &= p(t\eta_1, \zeta_2) + (1-t)(-\eta_1, \zeta_2)) \\ &\leq t \cdot p(\eta_1, \zeta_2) + (1-t) \cdot p(-\eta_1, \zeta_2) \\ &= t \cdot p(\eta_1, \zeta_2) + (1-t) \cdot p(\eta_1, \zeta_2) \\ &= p(\eta_1, \zeta_2) \end{aligned}$$

Aus iii) folgen nun leicht i) und ii). Aus

$$|\zeta_1| = p(|\zeta_1|, 0) \leq p(|\zeta_1|, |\zeta_2|) = p(\zeta_1, \zeta_2)$$

$$|\zeta_2| = p(0, |\zeta_2|) \leq p(|\zeta_1|, |\zeta_2|) = p(\zeta_1, \zeta_2)$$

folgt unmittelbar ii). Zum Beweis von i) ist eigentlich nur die Dreiecksungleichung zu zeigen. Sei also $z_1 = (x_1, y_1) \in X \times Y, i=1,2$, dann ist:

$$\begin{aligned} \|z_1 + z_2\|_p &= p(\|x_1 + x_2\|, \|y_1 + y_2\|) \\ &\leq p(\|x_1\| + \|x_2\|, \|y_1\| + \|y_2\|) \quad (\text{nach iii}) \\ &\leq p(\|x_1\|, \|y_1\|) + p(\|x_2\|, \|y_2\|) \\ &= \|z_1\| + \|z_2\| \end{aligned}$$

□

(A2) Es seien X, Y normierte Räume über K und $X \neq 0$. Sei $\varphi: X \rightarrow Y$ eine injektive, lineare, beschränkte Abbildung derart, dass auch $\varphi^{-1}: R(\varphi) \rightarrow X$ beschränkt ist. Sei $\psi: X \rightarrow Y$ linear, beschränkt und $\|\varphi - \psi\| \leq \frac{1}{2} \|\varphi^{-1}\|^{-1}$.

Dann ist ψ injektiv, ψ^{-1} beschränkt und es gilt die Abschätzung $\|\psi^{-1}\| \leq 2 \|\varphi^{-1}\|$.

Beweis: Da X vom Nullraum verschieden und φ injektiv ist, kann φ^{-1} nicht die Nullabbildung sein, weshalb $\|\varphi^{-1}\| > 0$ ist. Sei nun $x \in X$, dann gilt:

$$\|x\| = \|\varphi^{-1} \varphi x\| \leq \|\varphi^{-1}\| \|\varphi x\|$$

d.h. aber $\|\varphi x\| \geq \|\varphi^{-1}\|^{-1} \cdot \|x\|$

Weiter ist für diejenigen ψ mit $\|\varphi - \psi\| \leq \frac{1}{2} \|\varphi^{-1}\|^{-1}$

$$\begin{aligned} \|\psi x\| &\geq \|\varphi x\| - \|\psi x - \varphi x\| \\ &\geq \|\varphi^{-1}\|^{-1} \cdot \|x\| - \|\psi - \varphi\| \|x\| \\ &\geq \|\varphi^{-1}\|^{-1} \cdot \|x\| - \frac{1}{2} \|\varphi^{-1}\|^{-1} \cdot \|x\| \\ &= \frac{1}{2} \|\varphi^{-1}\|^{-1} \cdot \|x\| \end{aligned}$$

Hieraus sieht man, dass ψ injektiv ist. Mit $y = \psi x$ ergibt sich

$$\|y\| \geq \frac{1}{2} \|\varphi^{-1}\|^{-1} \cdot \|\psi^{-1} y\|$$

d.h. $\|\psi^{-1} y\| \leq 2 \|\varphi^{-1}\| \|y\| \quad (y \in R(\psi))$

Mithin ist $\|\psi^{-1}\| \leq 2 \|\varphi^{-1}\|$ und damit (A2) bewiesen. $\square$

(A3) Es seien X, Y Banachräume über K und $j: Y^* \times X^* \rightarrow (X \times Y)^*$ sei definiert durch $(j(y^*, x^*))(x, y) := \langle y^*, y \rangle - \langle x^*, x \rangle$ für $x \in X, x^* \in X^*, y \in Y, y^* \in Y^*$. Dann gilt:

i) j ist ein isometrischer Isomorphismus von $Y^* \times X^*$ auf $(X \times Y)^*$.

ii) Für jeden dicht definierten Operator $S \in \mathcal{O}(X, Y)$ ist

$$j(S^*) = S^\perp$$

Beweis: i) Zunächst sieht man, dass $j(y^*, x^*) \in (X \times Y)^*$ ist und dass $j(y^*, x^*)$ eine lineare Abbildung j erzeugt. Aus

$j(y^*, x^*) = 0$ folgt $\langle y^*, y \rangle = 0 = \langle x^*, x \rangle$ für alle $x \in X, y \in Y$. Also ist j auch injektiv. Ist $z^* \in (X \times Y)^*$, so bestätigt man leicht, dass die antilinearen Abbildungen x^* bzw. y^* , definiert durch $x^*x := -\langle z^*, (x, 0) \rangle$ bzw. $y^*y := \langle z^*, (0, y) \rangle$, zu X^* bzw. Y^* gehören und

$$\langle z^*, (x, y) \rangle = y^*y - x^*x = \langle y^*, y \rangle - \langle x^*, x \rangle$$

ist. Daher ist j auch surjektiv. Um j als isometrisch nachzuweisen, wählen wir $x \in X, x^* \in X^*, y \in Y, y^* \in Y^*$ und zeigen

$$\begin{aligned} |\langle j(y^*, x^*), (x, y) \rangle| &\leq |\langle y^*, y \rangle| + |\langle x^*, x \rangle| \leq \|y^*\| \|y\| + \|x^*\| \|x\| \\ &\leq [\|x^*\|^2 + \|y^*\|^2]^{1/2} \cdot [\|x\|^2 + \|y\|^2]^{1/2} \end{aligned}$$

woraus $\|j(y^*, x^*)\| \leq [\|x^*\|^2 + \|y^*\|^2]^{1/2}$ folgt.

Andererseits gibt es nach dem Satz von Hahn-Banach zu x^*, y^* und $\varepsilon < 1$ Elemente $x_\varepsilon \in X, y_\varepsilon \in Y$ mit $\|x_\varepsilon\| = \|x^*\|, \|y_\varepsilon\| = \|y^*\|$ so, dass $-\langle x^*, x_\varepsilon \rangle \geq \varepsilon \|x^*\|^2$ und $\langle y^*, y_\varepsilon \rangle \geq \varepsilon \|y^*\|^2$ gilt.

Also ist $|\langle j(y^*, x^*), (x_\varepsilon, y_\varepsilon) \rangle| = \langle y^*, y_\varepsilon \rangle - \langle x^*, x_\varepsilon \rangle$

$$\begin{aligned} &\geq \varepsilon [\|x^*\|^2 + \|y^*\|^2] \\ &= \varepsilon [\|x^*\|^2 + \|y^*\|^2]^{1/2} \cdot [\|x_\varepsilon\|^2 + \|y_\varepsilon\|^2]^{1/2} \end{aligned}$$

und daher $\|j(y^*, x^*)\| \geq \varepsilon [\|x^*\|^2 + \|y^*\|^2]^{1/2}$. Da ε beliebig nahe bei 1 gewählt werden kann, folgt schliesslich die Ungleichung $\|j(y^*, x^*)\| \geq [\|x^*\|^2 + \|y^*\|^2]^{1/2}$ und damit i).

ii) Nach Definition von j gilt für $x \in D(S), x^* \in X^*, y^* \in Y^*$ die Gleichung $\langle j(y^*, x^*), (x, Sx) \rangle = \langle y^*, Sx \rangle - \langle x^*, x \rangle$

Ist daher $j(y^*, x^*) \in S^\perp$, so liegt y^* in $D(S^*)$ und es gilt $x^* = S^*y^*$, also $S^\perp \subset j(S^*)$.

Ist umgekehrt $(y^*, x^*) \in S^*$, d.h. $y^* \in D(S^*)$ und $x^* = S^*y^*$, dann gilt $\langle j(y^*, x^*), (x, Sx) \rangle = 0$ für alle $x \in D(S)$. Also ist $j(y^*, S^*y^*) = j(y^*, x^*) \in S^\perp$, d.h. $j(S^*) \subset S^\perp$. $\square$

(A4) Lemma 3.2: Es sei (A, γ) ein AERWP über (X_0, X) mit Randdatenraum Y . Dann gilt:

i) Für $A' \in \mathcal{B}(X_0, X)$ und $\gamma' \in \mathcal{B}(X_0, Y)$ mit $\|A - A'\| + \|\gamma - \gamma'\| \leq \frac{1}{2c}$

(wobei c aus Definition 3.1.iv) stammt) gilt

$$\|x\|_0 \leq 2c [\|x\| + \|A'x\| + \|\gamma x\|] \quad (x \in X_0)$$

ii) A_γ ist ein abgeschlossener Operator aus $\mathcal{O}(X)$.

iii) Die Nullräume $N(A_\gamma)$ und $N([A, \gamma])$ sind gleich. Sie haben endliche Dimension, falls die Einbettung $X_0 \hookrightarrow X$ kompakt ist.

iv) Die Wertebereiche $R(A_\gamma)$ und $R([A, \gamma])$ besitzen gleiche Kodimension. Falls die Einbettung $X_0 \hookrightarrow X$ kompakt ist, sind $R(A_\gamma)$ und $R([A, \gamma])$ abgeschlossen und daher A_γ und $[A, \gamma]$ Semi-Fredholmoperatoren mit gleichem Index.

Beweis: i) Für $x \in X_0$ und $\|A-A'\| + \|\gamma-\gamma'\| \leq \frac{1}{2}c$ haben wir

$$\begin{aligned} \|x\|_0 &\leq c[\|x\| + \|Ax\| + \|\gamma x\|] \\ &\leq c[\|x\| + \|A'x\| + \|\gamma'x\|] + c[\|A-A'\| + \|\gamma-\gamma'\|] \cdot \|x\|_0 \\ &\leq c[\|x\| + \|A'x\| + \|\gamma'x\|] + \frac{1}{2} \cdot \|x\|_0. \end{aligned}$$

woraus sofort die Behauptung i) folgt.

ii) Sei $x_n \in D(A_\gamma)$, $x_n \rightarrow x$ und $A_\gamma x_n = Ax_n \rightarrow y$. Wegen $\gamma x_n = 0$ ist $\|x_n - x_m\|_0 \leq c[\|x_n - x_m\| + \|Ax_n - Ax_m\|]$. Also ist (x_n) in X_0 konvergent und zwar gegen x , da $X_0 \hookrightarrow X$ stetig ist. Nun ist aber $\gamma x = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma x_n = 0$, d.h. $x \in D(A_\gamma)$, und $y = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Ax = A_\gamma x$. Mithin ist A_γ ein abgeschlossener Operator aus $\mathcal{O}(X)$.

iii) $N(A_\gamma) = N([A, \gamma])$ ist unmittelbar klar. Für $x \in N(A_\gamma)$ haben wir nach Definition 3.1.iv) $\|x\|_0 \leq c\|x\|$. Also ist die Einbettung $N(A_\gamma) \hookrightarrow X_0$ stetig und wegen der Kompaktheit von $X_0 \hookrightarrow X$ ist auch die Einbettung $N(A_\gamma) \hookrightarrow X$ kompakt. Daraus folgt aber, dass $N(A_\gamma)$ endliche Dimension hat.

iv) Wir zeigen zunächst, dass $R(A_\gamma)$ und $R([A, \gamma])$ gleiche Kodimension haben. Hinreichend dafür ist, dass die Quotientenräume $X/R(A_\gamma)$ und $X \times Y/R([A, \gamma])$ algebraisch isomorph sind.

Sei die Abbildung $\varphi: X/R(A_Y) \rightarrow X \times Y/R([A, \gamma])$ definiert durch $\varphi(\{x\} + R(A_Y)) := \{(x, 0)\} + R([A, \gamma])$. φ ist wohldefiniert, denn aus $x - x' \in R(A_Y)$ folgt auch $(x, 0) - (x', 0) \in R([A, \gamma])$. Aus $\varphi(\{x\} + R(A_Y)) = 0$ ergibt sich $(x, 0) \in R([A, \gamma])$, also $x \in R(A_Y)$ und deshalb ist φ injektiv. Die Abbildung φ ist aber auch surjektiv. Sei nämlich $(x, y) \in X \times Y$, dann gibt es $x_0 \in X$ mit $y = \gamma(-x_0)$, denn γ ist nach Voraussetzung surjektiv. Setzen wir $x' = x + Ax_0$, so folgt $\varphi(\{x'\} + R(A_Y)) = \{(x, y)\} + R([A, \gamma])$, da $(x', 0) - (x, y) \in R([A, \gamma])$ ist.

Sei nun $X_0 \hookrightarrow X$ kompakt. Wir schliessen indirekt und nehmen an, dass $R(A_Y)$ nicht abgeschlossen ist. Da nach iii) $N(A_Y)$ endlichdimensional ist, gibt es einen in X abgeschlossenen Teilraum $M \subset X$ so, dass X die direkte algebraische Summe von $N(A_Y)$ und M ist. Sei $\hat{A}_Y := A_Y \cap (M \times X)$, dann ist $\hat{A}_Y$ abgeschlossen, injektiv und $R(\hat{A}_Y) = R(A_Y)$. Da $R(\hat{A}_Y)$ nicht abgeschlossen ist, muss $\hat{A}_Y^{-1}$ nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen unbeschränkt sein. Es gibt daher $(\hat{A}_Y \neq 0)$ eine in X normierte Folge (x_n) aus $D(\hat{A}_Y) = N(\gamma) \cap M$ so, dass $\hat{A}_Y x_n = A_Y x_n = Ax_n$ gegen 0 konvergiert. Wegen $\|x_n\|_0 \leq c [\|x_n\| + \|Ax_n\|] \leq c [1 + \sup_{n \in \mathbb{N}} \|Ax_n\|]$ und weil $X_0 \hookrightarrow X$ kompakt ist, konvergiert o.E.d.A. die Folge (x_n) in X gegen ein $x \in X$. Aus Stetigkeitsgründen hat x die Norm 1 und liegt x in M . Da A_Y nach ii) abgeschlossen ist und $(x_n, A_Y x_n)$ gegen $(x, 0)$ konvergiert, ist $x \in N(A_Y)$, also haben $N(A_Y)$ und M einen Durchschnitt, der nicht nur das Nullelement enthält. Dies widerspricht jedoch der Tatsache, dass X die direkte algebraische Summe von $N(A_Y)$ und M ist.

Vollkommen analog erhält man die Abgeschlossenheit von $R([A, \gamma])$. Dass A_Y und $[A, \gamma]$ Fredholmoperatoren mit gleichem Index sind,

ergibt sich nun direkt aus den schon bewiesenen Eigenschaften.

(A5) Satz: Es sei $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum über K , Ω ein topologischer Raum und $S: \Omega \rightarrow \mathcal{O}(X)$ eine (in der Öffnungstopologie) stetige Abbildung. Für jedes $\omega \in \Omega$ bezeichne $\mathfrak{N}(S(\omega))$ den numerischen Wertebereich von $S(\omega)$. Es sei $\Delta \subset \bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\} \times (K \setminus \overline{\mathfrak{N}(S(\omega))})$ so gewählt, dass die Abbildung $\Delta \rightarrow \mathbb{R}$, $(\omega, \lambda) \rightarrow \text{dist}(\lambda, \mathfrak{N}(S(\omega)))^{-1}$ lokal beschränkt ist. Dann gilt:

i) Die Abbildung $\Delta \rightarrow (\mathcal{U}(X), \hat{d})$, $(\omega, \lambda) \rightarrow R(S(\omega) - \lambda I)$ ist stetig. Genauer gilt folgende Abschätzung

$$\hat{\delta}(R(S(\omega_1) - \lambda_1 I), R(S(\omega_2) - \lambda_2 I)) \leq 2 \max_{i=1,2} \{ [1 + \text{dist}(\lambda_i, \mathfrak{N}(S(\omega_i)))^{-2}]^{1/2} \} \cdot [|\lambda_1 - \lambda_2| + (1 + |\lambda_2|)^2 \cdot \hat{\delta}(S(\omega_1), S(\omega_2))]$$

für alle $(\omega_1, \lambda_1), (\omega_2, \lambda_2) \in \Delta$.

ii) Falls Δ zusammenhängend ist, ist $\text{codim } \overline{R(S(\omega) - \lambda I)}$ konstant für alle $(\omega, \lambda) \in \Delta$.

Beweis: Zunächst erinnern wir daran, dass $X \times X$ die Norm $\|(x, x')\| := [\|x\|^2 + \|x'\|^2]^{1/2}$ trägt. Analog wie im Beweis zu Korollar 1.12 auf Seite 21 erhalten wir für $(\omega_1, \lambda_1), (\omega_2, \lambda_2) \in \Delta$ die Abschätzung

$$\hat{\delta}(R(S(\omega_1) - \lambda_1 I), R(S(\omega_2) - \lambda_2 I)) \leq \max_{i=1,2} \{ [1 + \text{dist}(\lambda_i, \mathfrak{N}(S(\omega_i)))^{-2}]^{1/2} \} \cdot \hat{\delta}(S(\omega_1) - \lambda_1 I, S(\omega_2) - \lambda_2 I)$$

$\hat{\delta}(S(\omega_1) - \lambda_1 I, S(\omega_2) - \lambda_2 I)$ lässt sich wegen (1.10), Satz 1.6.i), (1.17) und Satz 1.14.ii) weiter abschätzen zu

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(S(\omega_1) - \lambda_1 I, S(\omega_2) - \lambda_2 I) &\leq \\ &\leq 2 [\hat{\delta}(S(\omega_1) - \lambda_1 I, S(\omega_1) - \lambda_2 I) + \hat{\delta}(S(\omega_1) - \lambda_2 I, S(\omega_2) - \lambda_2 I)] \\ &\leq 2 [|\lambda_1 - \lambda_2| + (1 + |\lambda_2|)^2 \cdot \hat{\delta}(S(\omega_1), S(\omega_2))] \end{aligned}$$

Aus beiden Ungleichungen folgt nun die behauptete Abschätzung. Die Behauptung ii) ergibt sich genauso wie in dem Beweis zu Korollar 1.12. $\square$

(A6)

Spezialisiert man den Satz aus (A5) zu einer Schar $(S(\omega))_{\omega \in \Omega}$ von symmetrischen Operatoren, so lässt sich daraus wiederum ein Resultat über die wesentliche Selbstadjungiertheit der Operatoren $S(\omega)$ gewinnen.

Satz: Es sei $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$, Ω ein topologischer Raum und $S: \Omega \rightarrow \mathfrak{S}(X)$ eine (in der Öffnungstopologie von $\mathfrak{S}(X)$) stetige Abbildung in die Menge $\mathfrak{S}(X)$ der symmetrischen Operatoren von X . Es sei $\mu \in \{+i, -i\}$. Dann gilt:

- i) $\hat{\delta}(R(S(\omega_1) - \mu I), R(S(\omega_2) - \mu I)) \leq 8\sqrt{2} \cdot \hat{\delta}(S(\omega_1), S(\omega_2))$
für alle $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$.
- ii) Ist Ω zusammenhängend und $S(\omega_0)$ wesentlich selbstadjungiert für ein $\omega_0 \in \Omega$, so ist $S(\omega)$ wesentlich selbstadjungiert für alle $\omega \in \Omega$.

Obwohl der allgemeinere Satz 2.1 obiges Ergebnis enthält, erscheint uns dieses Resultat auf Grund der angewandten Beweismethode als erwähnenswert. Während nämlich in Satz 2.1 über Stetigkeitsbetrachtungen der Graphen von $S(\omega)$ auf die wesentliche Selbstadjungiertheit von $S(\omega)$ geschlossen wird, argumentieren wir in diesem Satz "klassisch", d.h. wir zeigen die wesentliche Selbstadjungiertheit von $S(\omega)$ über die Dichtheit der Wertebereiche von $S(\omega) \pm iI$, wobei letzteres wieder durch Stetigkeitsbetrachtungen gezeigt wird.

Beweis des Satzes: Zunächst bemerken wir, dass für alle $\omega \in \Omega$

$$\Re(S(\omega)) \subset \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \text{dist}(\mu, \Re(S(\omega))) \geq \text{dist}(\mu, \mathbb{R}) = 1 \quad \text{ist.}$$

Also ist nach (A5)-Satz, i)

$$\hat{\delta}(R(S(\omega_1) - \mu I), R(S(\omega_2) - \mu I)) \leq 2\sqrt{2} \cdot 4 \cdot \hat{\delta}(S(\omega_1), S(\omega_2))$$

für alle $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ und damit die Abbildung $\Omega \rightarrow \mathcal{U}(X)$, $\omega \rightarrow R(S(\omega) - \mu I)$ stetig, da S als stetig vorausgesetzt ist. Wenden wir nun Lemma 2.2 an mit $M(\omega) = R(S(\omega) - \mu I)$ und

$N(\omega) = X \ (\omega \in \Omega)$, so folgt für alle $\omega \in \Omega$

$$\overline{R(S(\omega) - \mu I)} = \overline{M(\omega)} = \overline{N(\omega)} = X \quad ,$$

da für ein $\omega_0 \in \Omega$ der Operator $S(\omega_0)$ wesentlich selbstadjungiert ist, d.h. $\overline{M(\omega_0)} = X = N(\omega_0)$ gilt. Nach einem bekannten Kriterium ist daher $S(\omega)$ wesentlich selbstadjungiert für alle $\omega \in \Omega$. $\square$

Bemerkung: Wir hätten (A6)-Satz auch aus (A5)-Satz folgern können (man setze dort $\Delta = \Omega \times \{\mu\}$), doch legten wir Wert auf einen Beweis, der den besonderen Gegebenheiten angepasst ist.

Bezeichnungen

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen = $\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^+$	Menge derjenigen reellen Zahlen, die ≥ 0 sind
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$\mathbb{K}$	stellvertretendes Symbol für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$
$\mathcal{U}(X)$	siehe Seite 7
$d, \delta, \hat{d}, \hat{\delta}$	siehe Seite 7, 8, 13
S_N	Sphäre relativ N , siehe Seite 7
$\text{dist}(x, M)$	Abstand von x zur Menge M
$\overline{N}$	topologische Abschliessung von N
X^*	Raum der stetigen Antilinearformen auf X
$M^\perp$	$\{x^* \mid x^* \in X^*, x^* _M = 0\}$
$\mathcal{B}(X, Y)$	Menge der linearen, beschränkten Operatoren von X in Y
$\mathcal{O}(X, Y)$	Menge der linearen Operatoren $S : D(S) \rightarrow Y$
$\mathcal{O}(X)$	$\mathcal{O}(X, X)$
$\ \cdot\ _p$	siehe Seite 12, (1.13)
$\ S\ _T$	siehe Seite 14, (1.16)
$\widehat{T}$	Abschliessung des Operators T
S^*	Adjungierte zu S , siehe Seite 29
$\mathcal{S}(X)$	Menge der symmetrischen Operatoren von X
$D(S)$	Definitionsbereich von S
$N(S)$	Nullraum von S
$R(S)$	Wertebereich von S
$S + T$	siehe Seite 12
$\lambda \cdot T$	siehe Seite 12
$S _D$	Einschränkung von S auf D

$\mathfrak{N}(S)$	numerischer Wertebereich von S , siehe Seite 20
$\rho(T)$	Resolvente von T , siehe Seite 27
$\sigma(T)$	Spektrum von T , siehe Seite 27
p'	duale Norm zu p , siehe Seite 13
$\mathfrak{T}(X)$	siehe Seite 27
AERWP	siehe Seite 44, Definition 3.1
ω^*	Konjugiert-Komplexes in $\mathbb{C}$ zu ω

Die Zeichen $\subset, \supset, \setminus, \cup, \cap$ werden in üblicher Weise verwendet, wobei bei $\subset$ und $\supset$ die Gleichheit der Mengen nicht ausgeschlossen wird.

Das Symbol $\square$ kennzeichnet das Ende eines Beweises.

Literaturverzeichnis

- [1] ACHIESER, N.I. - GLASMANN, I.M.: Theorie der linearen Operatoren im Hilbertraum. Berlin: Akademie-Verlag 1968
- [2] AGMON, S. - DOUGLIS, A. - NIRENBERG, N.: Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I. Comm. Pure Appl. Math. 12, 623-727 (1959)
- [3] BERKSON, E.: Some metrics on the subspaces of a Banach space. Pacific J. Math. 13, 7-22 (1963)
- [4] BROWDER, F.E.: Non-local elliptic boundary value problems. Amer. Journ. Math. 86, 735-750 (1964)
- [5] CORDES, H.O. - LABROUSSE, J.P.: The invariance of the index in the metric space of closed operators. J. Math. Mech. 12, 693-719 (1963)
- [6] GOHBERG, I.C. - KREIN, M.G.: The basic propositions on the defect numbers, root numbers and indices of linear operators. Am. Math. Soc. Transl. (2) 13, 185-264 (1960)
(Russisches Original in: Uspehi Mat. Nauk 12, 2 (74), 43-118 (1957))
- [7] GOHBERG, I.C. - MARKUS, A.S.: Zwei Sätze über die Öffnung von Unterräumen eines Banachraumes. Uspehi Mat. Nauk 14, 5 (89), 135-140 (1959) (russisch)
- [8] GUSTAFSON, K.E. - REJTO, P.A.: Some essentially selfadjoint Dirac operators with spherically symmetric Potentials. Israel J. of Math., Vol. 14, No 1, 63-75 (1973)
- [9] HESS, P. - KATO, T.: Perturbation of closed operators and their adjoints. Commentarii Math. Helvet. 45, 524-529 (1970)
- [10] KATO, T.: Perturbation theory for linear operators. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1966

- [11] KATO, T.: Fundamental properties of Hamiltonian operators of Schrödinger type. Trans. Am. Math. Soc. 70, 195-211 (1951)
- [12] KATO, T.: Perturbation theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operators. J. Analyse Math. 6, 261-322 (1958)
- [13] KELLEY, J. L.: General topology. Princeton, Toronto, London, Melbourne: D. Van Nostrand 1955
- [14] KREIN, M. G. - KRASNOSEL'SKII, M. A. - MIL'MAN, D. C.: Über die Defektzahlen von linearen Operatoren in einem Banachraum und über einige geometrische Probleme. Sbornik Trud. Inst. Mat. Akad. Ukr. SSR 11, 97-112 (1948) (russisch)
- [15] MASSERA, J. L. - SCHÄFFER, J. J.: Linear differential equations and functional analysis, I. Ann. Math. 67, 517-573 (1958)
- [16] NEUBAUER, G.: Über den Index abgeschlossener Operatoren in Banachräumen. Math. Ann. 160, 93-130 (1965)
- [17] NEWBURGH, J. D.: A topology for closed operators. Ann. Math. 53, 250-255 (1951)
- [18] RELICH, F.: Störungstheorie der Spektralzerlegung III. Math. Ann. 116, 555-570 (1939)
- [19] STUMMEL, F.: Singuläre elliptische Differentialoperatoren in Hilbertschen Räumen. Math. Ann. 132, 150-176 (1956)
- [20] WEIDMANN, J.: Antrittsvorlesung, Frankfurt 1972
- [21] WÜST, R.: Generalisations of Rellich's theorem on perturbation of (essentially) self-adjoint operators. Math. Z. 119, 276-280 (1971)
- [22] WÜST, R.: Holomorphic operator families and stability of selfadjointness. Math. Z. 125, 349-358 (1972)

Lebenslauf

Am 22. April 1946 wurde ich in Schlachters (bei Lindau) geboren. Noch im selben Jahr zogen meine Eltern mit meinem älteren Bruder und mir nach Scheidegg im Allgäu, wo mein Vater als Polizeibeamter tätig war.

Ich besuchte von 1952 - 1956 die Volksschule in Scheidegg und anschliessend die Oberrealschule in Lindenberg im Allgäu, an der ich im Sommer 1965 die Reifeprüfung ablegte.

Vom Wintersemester 1965/66 bis zum Wintersemester 1970/71 studierte ich an der Universität München die Fächer Mathematik und Physik. Im Frühjahr 1971 legte ich für diese Fächerkombination die wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an Gymnasien ab.

Seit Sommer 1971 bin ich Verwalter der Dienstgeschäfte eines wissenschaftlichen Assistenten am Mathematischen Institut der Universität München.

